Comment exploiter toutes les ressources et augmenter les performances de votre

AMSTRAD

scanned by www.amstradeus.com

ÉDITIONS WEKA

Partie 13

Notions scientifiques de base

13/0

Table des matières

13/1

Introduction à l'électronique

Cette partie est destinée à tous ceux qui ont l'intention de construire puis de rajouter une ou plusieurs cartes additionnelles sur leur AMSTRAD. La réalisation de telles cartes fait appel à des notions d'électronique analogique et logique qui seront développées ici.

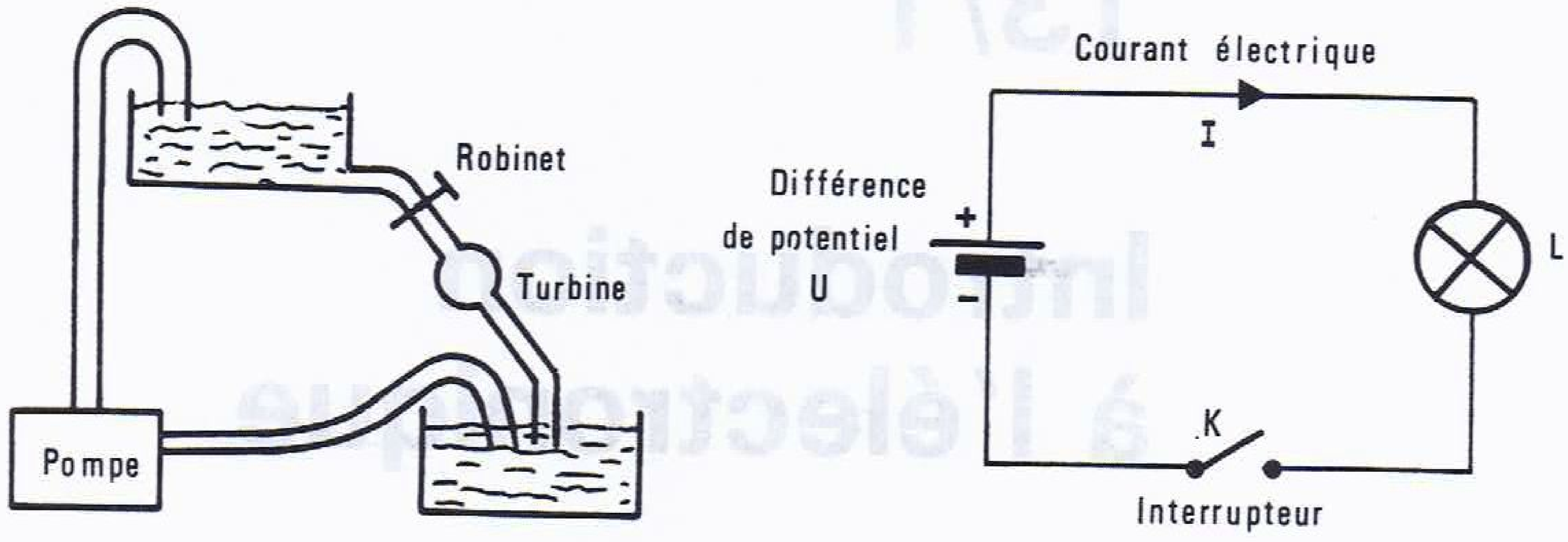
L'électronique logique concerne tous les composants (transistors, circuits intégrés, microprocesseurs, etc.) qui manipulent des niveaux de tension, alors que l'électronique analogique concerne tous les composants qui manipulent des tensions continues ou alternatives qui n'ont pas des niveaux fixes prédéfinis. Dans la suite, nous allons développer séparément ces deux types d'électronique.

13/1.1

Electronique analogique

I. Notions fondamentales

L'électronique analogique manipule deux grandeurs fondamentales : les tensions et les courants. Pour bien comprendre la signification de ces grandeurs, nous allons faire un parallèle avec un circuit hydraulique.



Le robinet est comparable à l'interrupteur, la turbine à la lampe, la pompe et le réservoir au générateur. Le débit de l'eau correspond au débit d'électricité ou intensité I dans le circuit. La dénivellation entre les deux plans d'eau correspond à la différence de potentiel aux bornes du générateur U.

Poursuivons l'analogie entre électricité et hydraulique :

Le débit d'eau dépend de :

— la dénivellation des deux plans d'eau,

— la résistance de la turbine.

L'intensité dépend de :

— la différence de potentiel aux bornes du générateur,

— la résistance de la lampe.

Le débit est le même tout le long du tuyau.

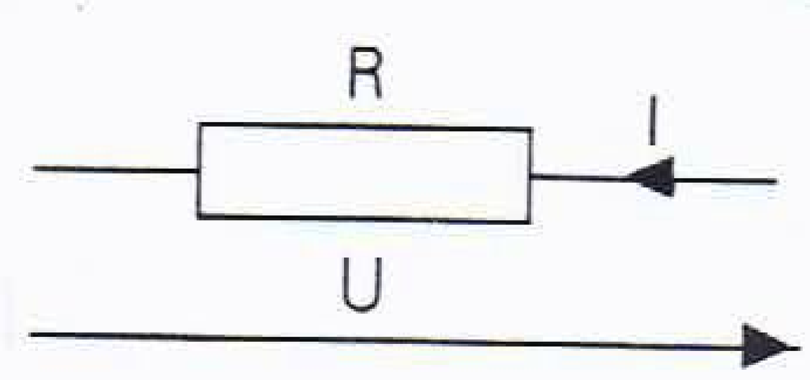
L'intensité est la même en tout point du circuit électrique.

LES RESISTANCES

Loi d'Ohm :

La tension aux bornes d'un dipôle est reliée à sa résistance et au courant qui le traverse par la loi d'Ohm :

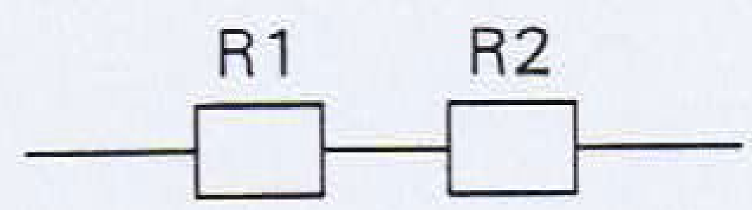
$$U = R \cdot I$$



Montages série et parallèle :

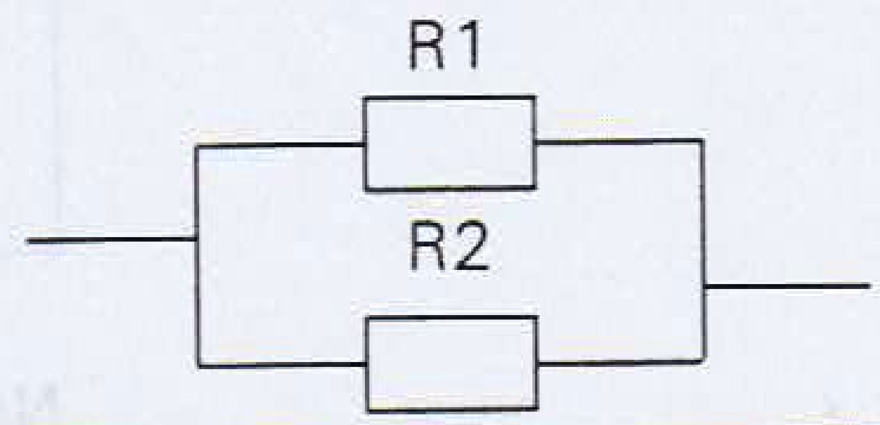
Deux résistances en série s'ajoutent

$$R = R1 + R2$$



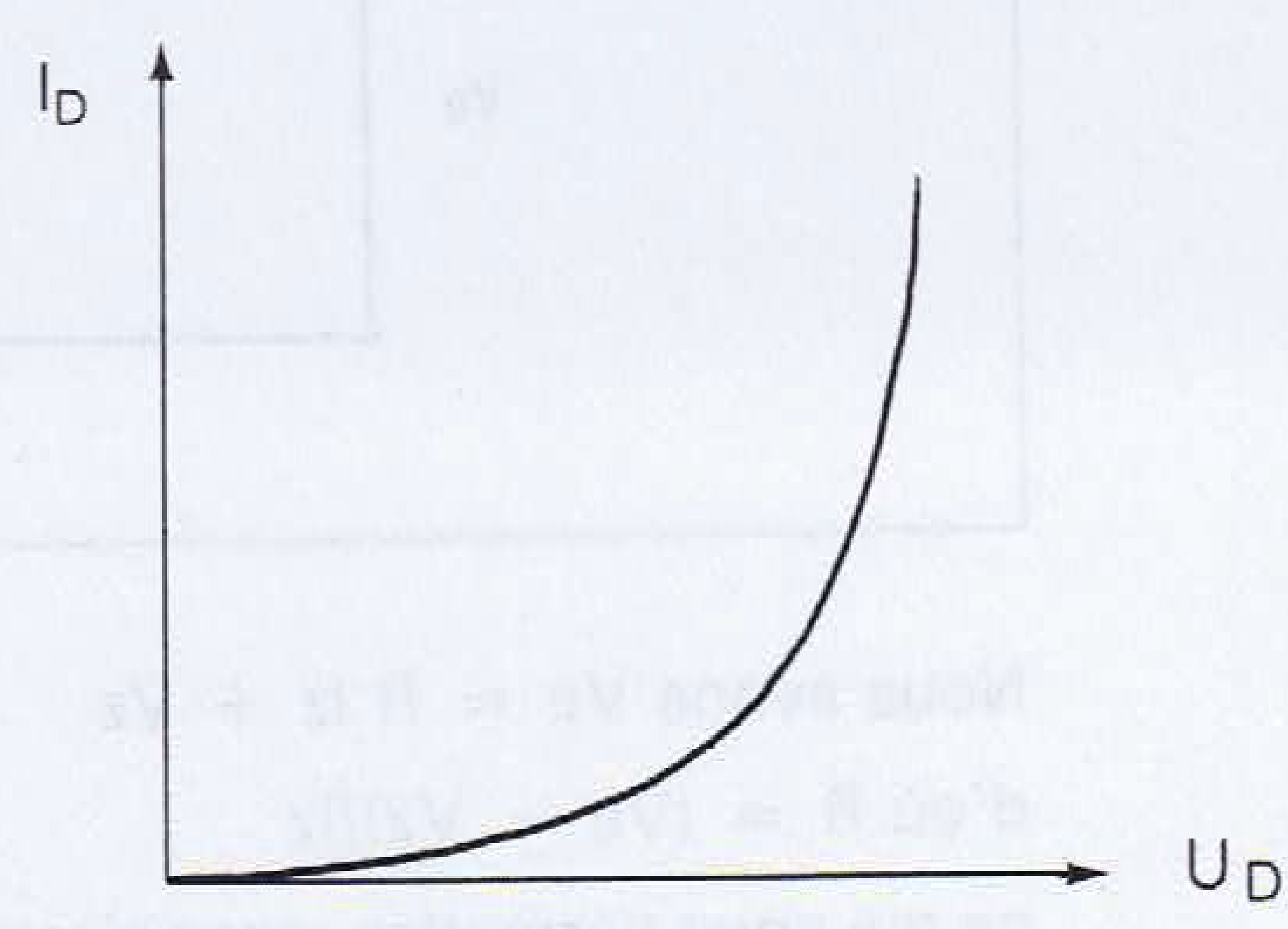
Deux résistances en parallèle sont reliées par la loi :

$$R = R1 \,.\, R2 \,/\, (R1 + R2)$$



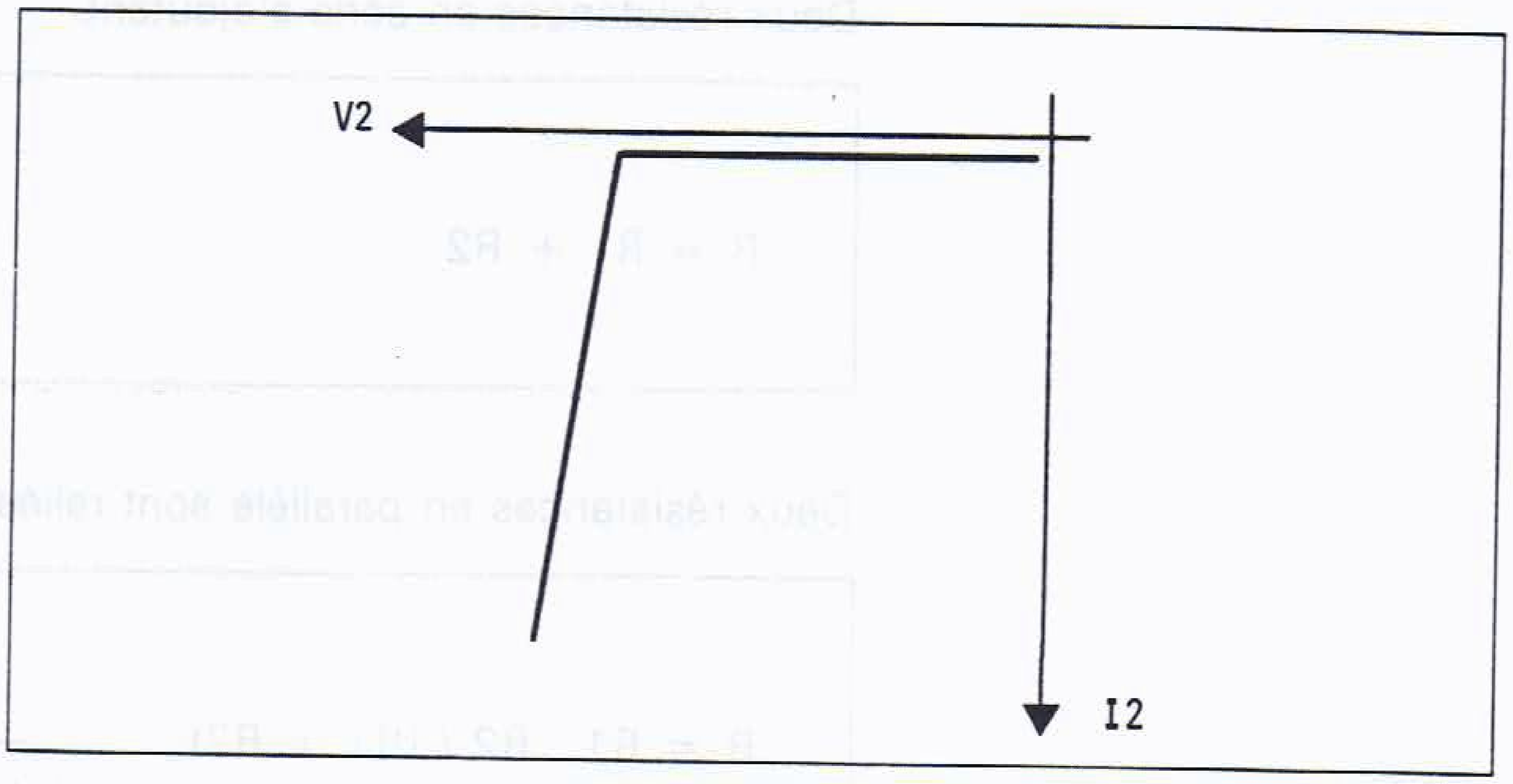
Les diodes :

Ce sont des composants non linéaires (dont la courbe $I = f(U)$ n'est pas linéaire) qui présentent deux bornes et se laissent traverser par un courant dans un seul sens. La tension aux bornes d'une diode suit la courbe suivante :



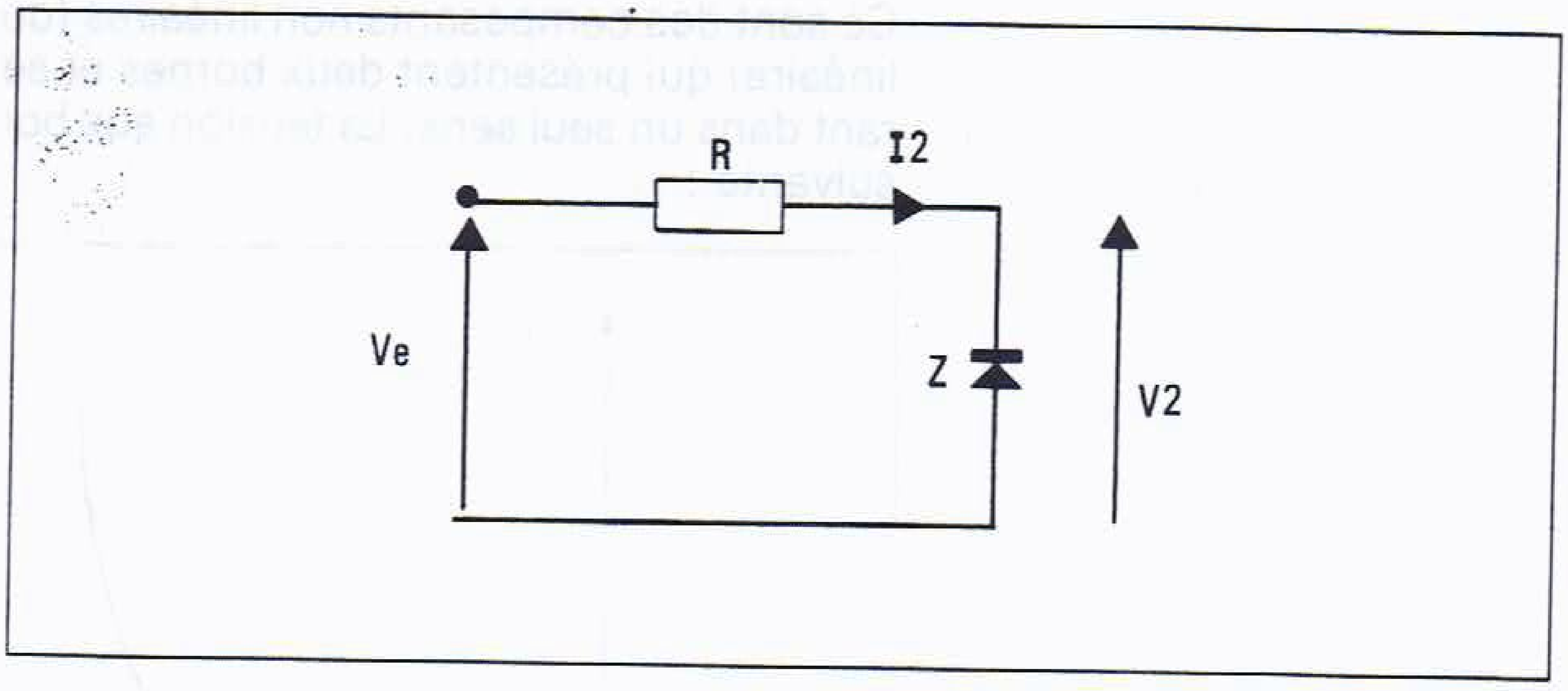
Les diodes Zéner sont des diodes spécialement utilisées pour réaliser des circuits stabilisateurs de tension continue.

La caractéristique courant-tension d'une diode Zéner est la suivante :



Nous voyons donc que ce composant peut servir à stabiliser une tension continue (la tension à ses bornes varie peu quand le courant qui le traverse varie) lorsqu'on le monte en inverse.

Le montage le plus classique est le suivant :



Nous avons $Ve = R\ Iz + Vz$

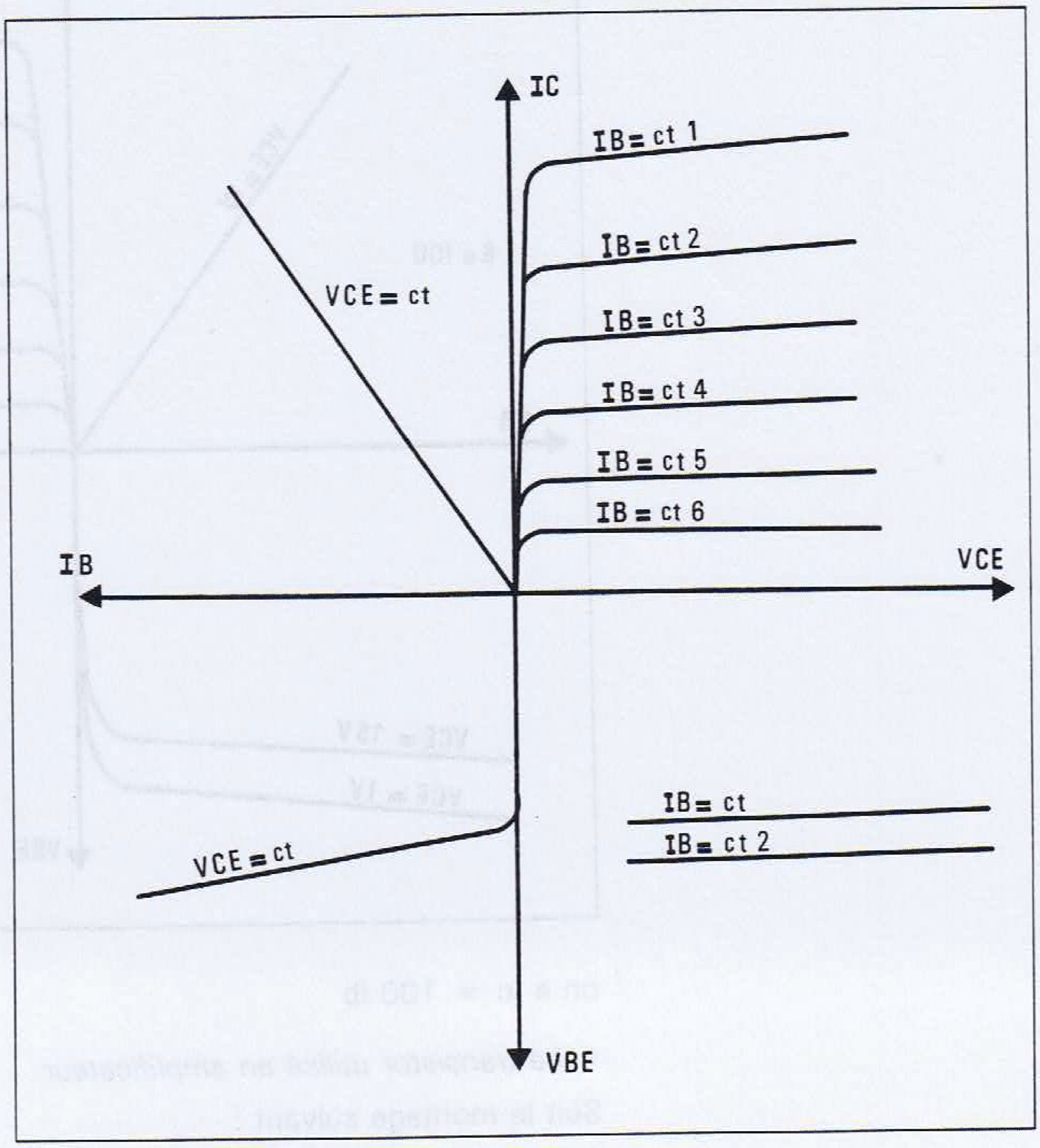
d'où $R = (Ve - Vz)/Iz$

ce qui nous permettra, connaissant la tension zéner Vz, la tension d'alimentation Ve et les limites supérieure et inférieure de variation du courant, de choisir une résistance appropriée de telle sorte que :

$(Ve - Vz)/Iz\ max < R < (Ve - Vz)/Iz\ min$

Les transistors :

Ces composants possèdent trois broches appelées base, collecteur et émetteur. Les caractéristiques d'un transistor classique sont les suivantes :

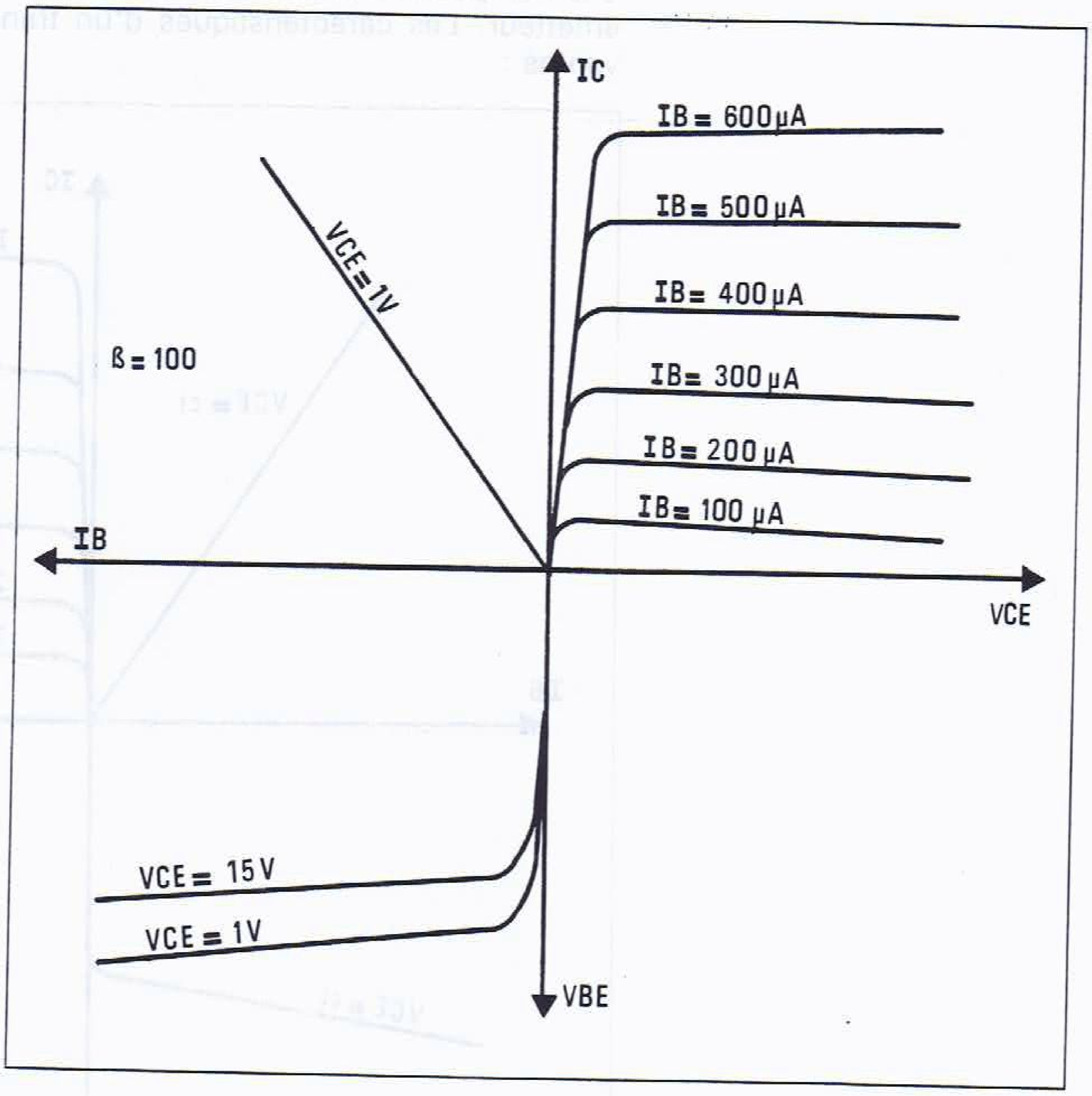


Le courant Ic passant dans le collecteur du transistor est relié au courant Ib par une loi linéaire du type :

Ic = B Ib + IceO

Remarque : IceO est très faible devant β Ib et souvent négligé.

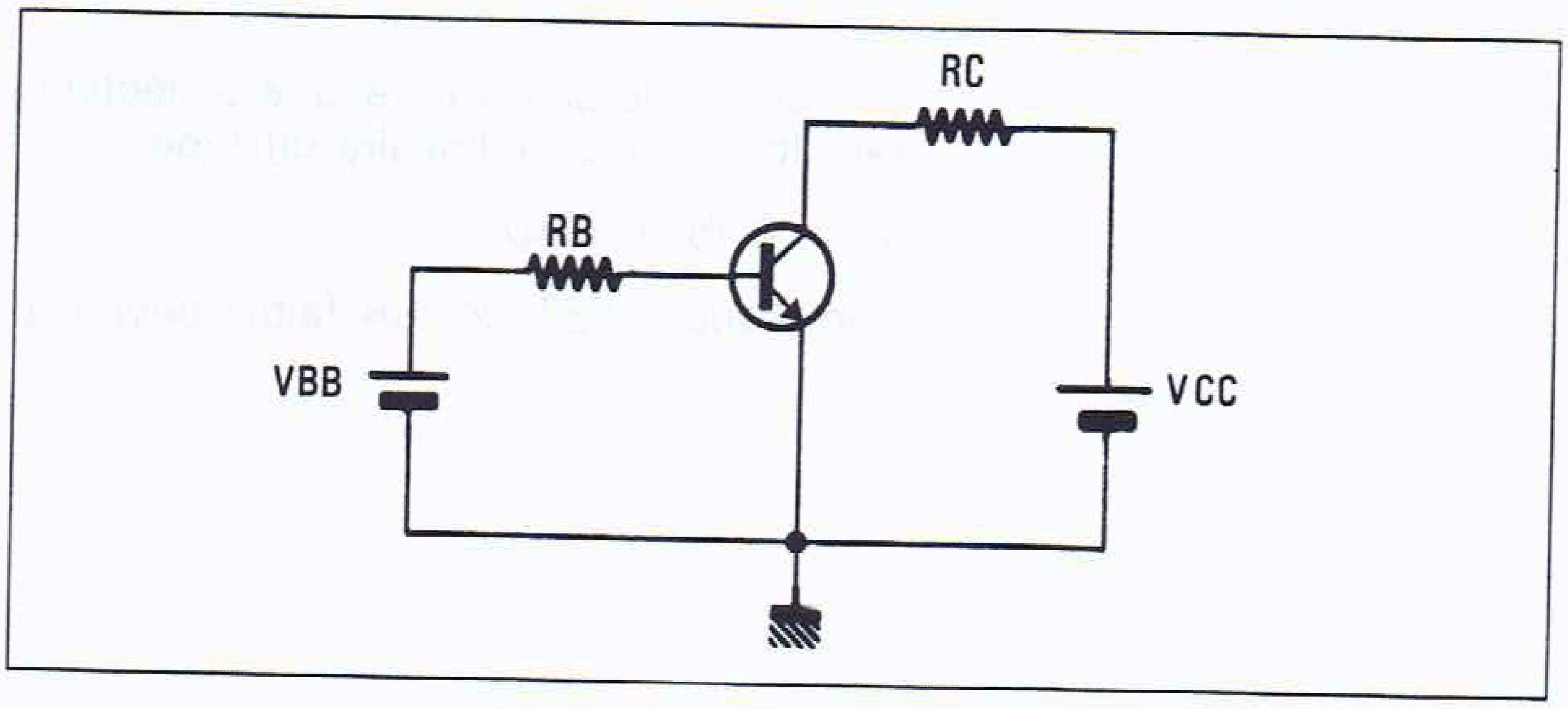
Par exemple, sur le transistor 2N 3391 dont les caractéristiques sont les suivantes :



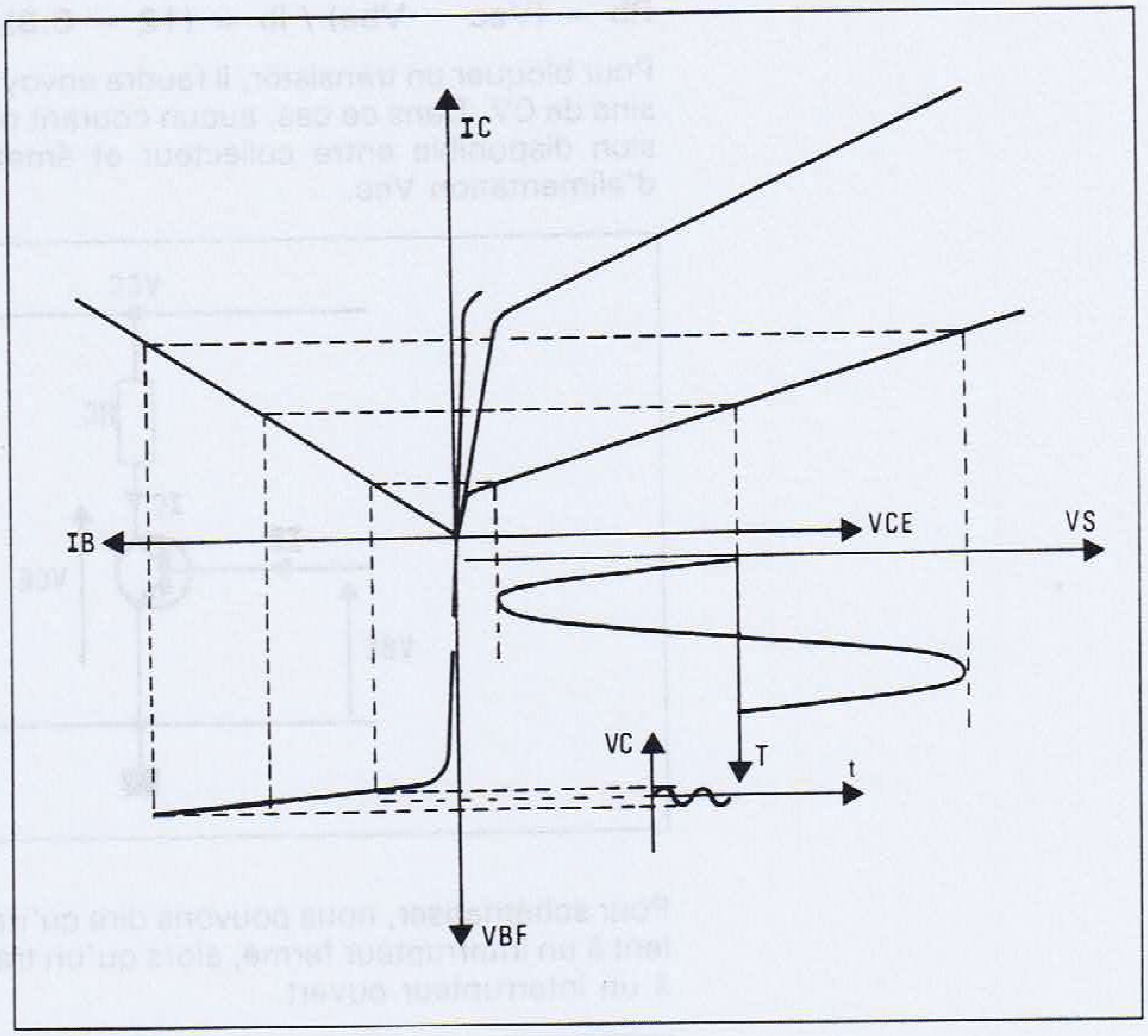
on a $Ic \simeq 100\ Ib$

• *Le transistor utilisé en amplificateur*

Soit le montage suivant :



Si nous envoyons à l'entrée une tension alternative, elle sera amplifiée et disponible au niveau du collecteur. Nous pouvons mettre en évidence cette amplification en nous servant des caractéristiques du transistor :



• *Le transistor en commutation*

Un transistor classique peut être utilisé en « tout ou rien », c'est-à-dire que sa sortie peut occuper deux paliers : un bas et un haut. Dans ce cas, on dit que le transistor travaille en commutation. Le seuil bas est atteint lorsque le transistor est « saturé ». Le seuil haut est atteint lorsque le transistor est « bloqué ».

Pour saturer un transistor, il faut lui fournir une tension Vbe supérieure à 0,8 volts pour un transistor au Silicium et 0,4 volts pour un transistor au Germanium.

Cette tension produit un courant de saturation Ib sat qui a pour valeur :

Ib sat = Ic sat/β min

Prenons l'exemple suivant pour clarifier la notion de saturation :

Nous avons Ib sat = Ic sat/β min = 0.75 mA.

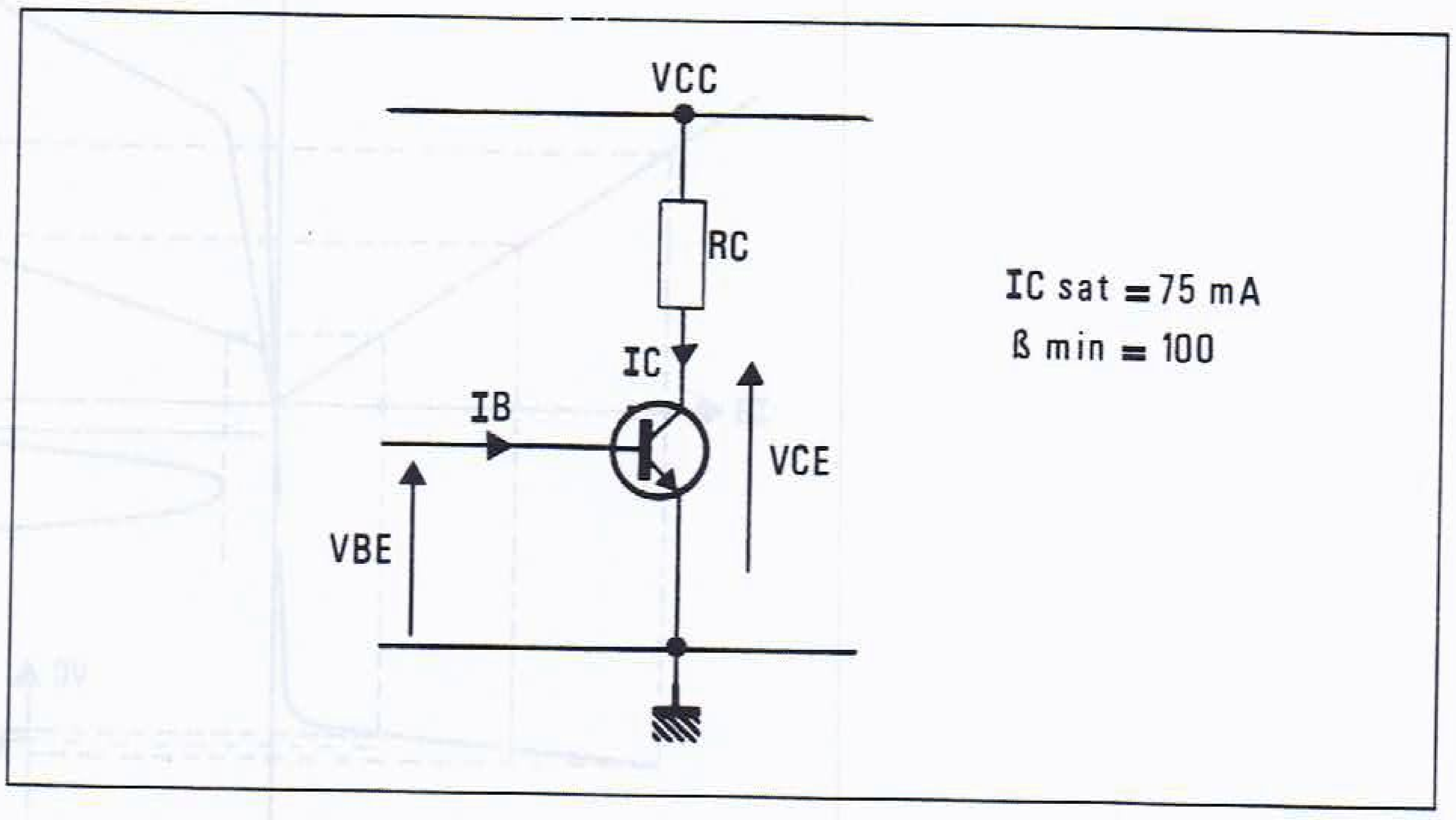
Pour être sûr que le transistor est saturé, nous allons appliquer un coefficient de « sur-saturation » à la valeur de Ib sat précédente. Dans la pratique, ce coefficient sera choisi entre 1 et 3. Nous le prendrons égal à 2 dans notre exemple.

Nous avons donc : $Ib = K\ Ibsat = 2 \times 0.75 = 1.5$ mA

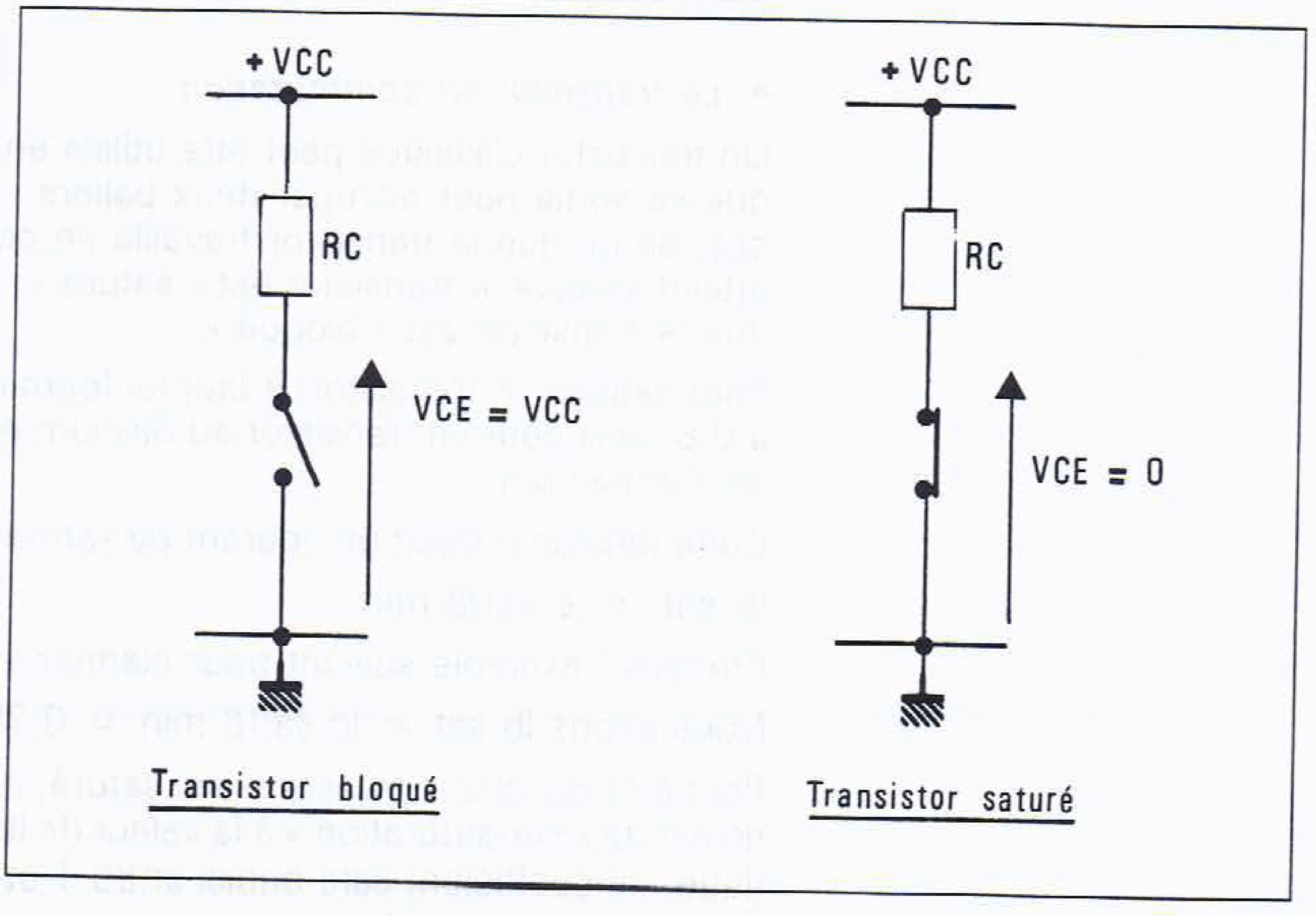
La résistance Rb aura donc pour valeur :

$$Rb = (Vcc - Vbe) / Ib = (12 - 0.8)/1.5 = 7.46\ K$$

Pour bloquer un transistor, il faudra envoyer sur sa base une tension voisine de 0V. Dans ce cas, aucun courant ne passera sur la sortie. La tension disponible entre collecteur et émetteur sera égale à la tension d'alimentation Vcc.



Pour schématiser, nous pouvons dire qu'un transistor saturé est équivalent à un interrupteur fermé, alors qu'un transistor bloqué est équivalent à un interrupteur ouvert.



13/1.2

Electronique logique

I. Notions fondamentales

A. DÉFINITIONS ET CONVENTIONS

Variables binaires

Pour faciliter l'assimilation des concepts inhérents à l'électronique logique, nous allons manipuler des variables binaires (ou booléennes) qui représenteront une propriété ou un événement. De telles variables peuvent prendre deux valeurs distinctes complémentaires : 0 et 1.

Types de logique

La logique binaire se décompose en :

— la logique combinatoire ;

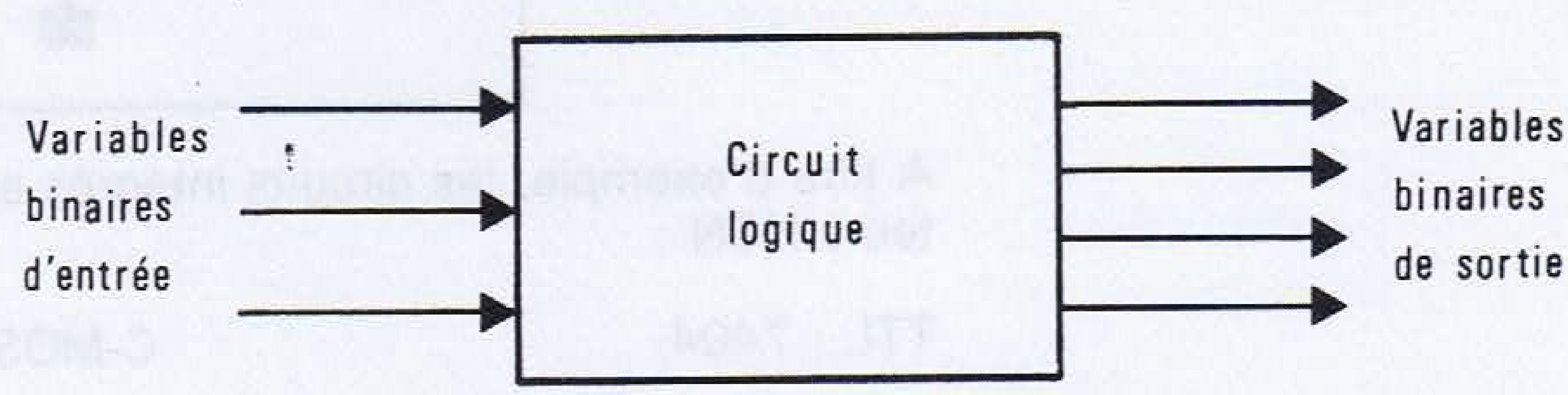
— la logique séquentielle.

Pour illustrer la différence entre ces deux types de logique, considérons un circuit logique quelconque matérialisé par une boîte noire.

Sur cette boîte noire :

— faisons arriver plusieurs connexions correspondant aux variables binaires d'entrée ;

— faisons sortir plusieurs connexions correspondant aux variables binaires de sortie.



Un circuit numérique fera de la logique combinatoire si les variables de sortie dépendent uniquement des variables d'entrée. Par contre, il fera de la logique séquentielle si les variables de sortie dépendent des variables d'entrée mais aussi des variables de sortie précédentes.

Convention

Dans la suite, nous adopterons la convention suivante : la négation logique (ou complément) d'une variable logique x sera notée $\overline{x}$.

B. FONCTIONS BINAIRES

a) Négation logique (ou complément) : Fonction NON (NOT en anglais)

Pour schématiser le fonctionnement des fonctions logiques, nous utiliserons des tables de vérité. Ces tables se présentent sous la forme de tableaux à une ou plusieurs entrées et à une sortie.

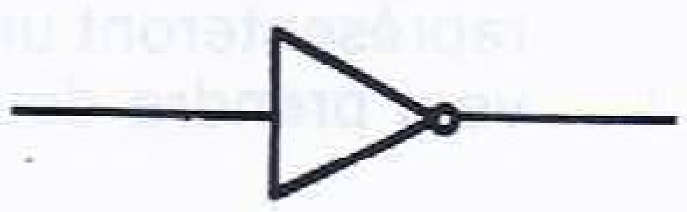
La table de vérité de la fonction NON est la suivante :

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

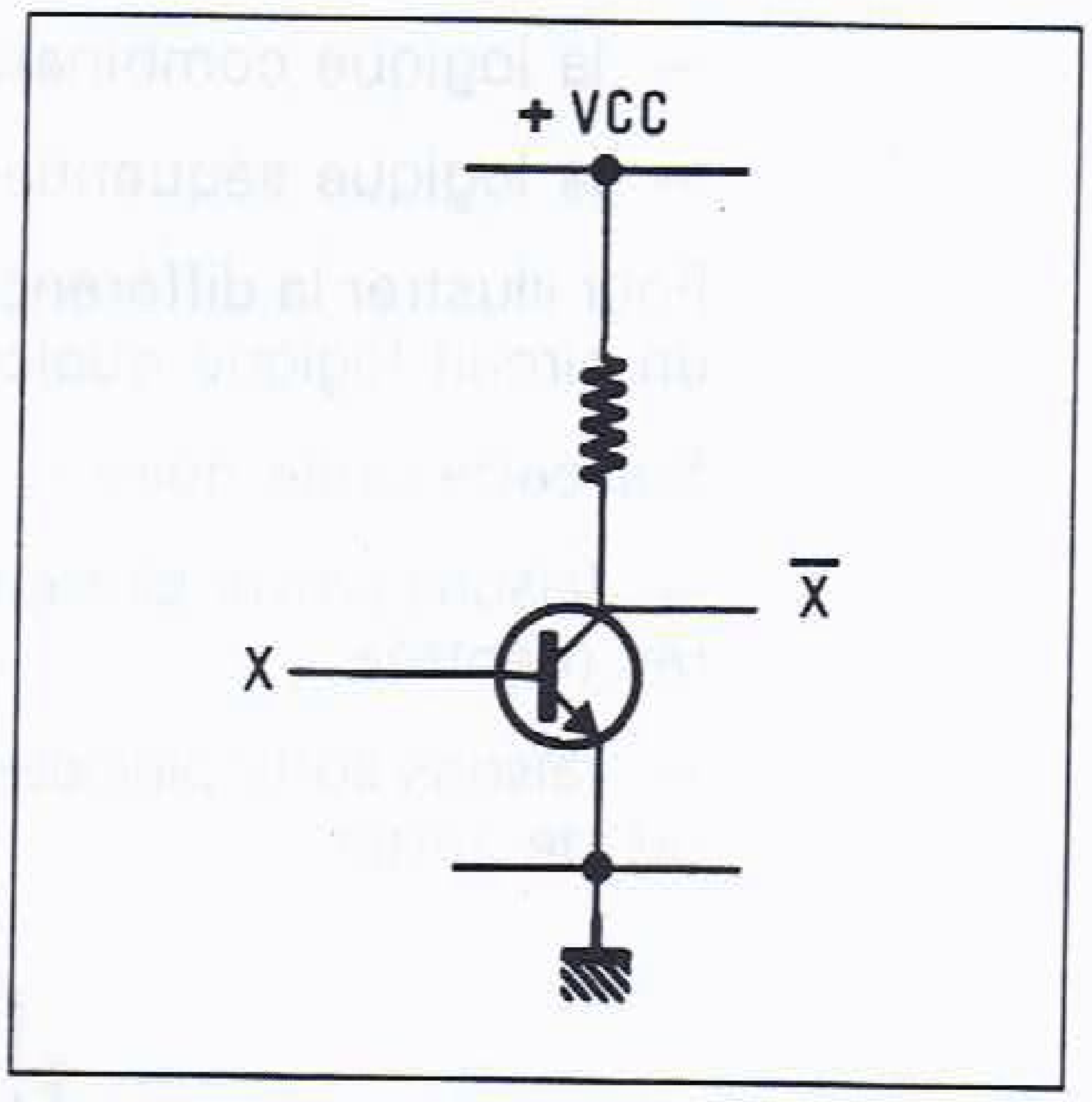
Cette table indique que :

un 0 logique présenté en entrée provoque une sortie à 1,
un 1 logique présenté en entrée provoque une sortie à 0.

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction NON peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs NON :

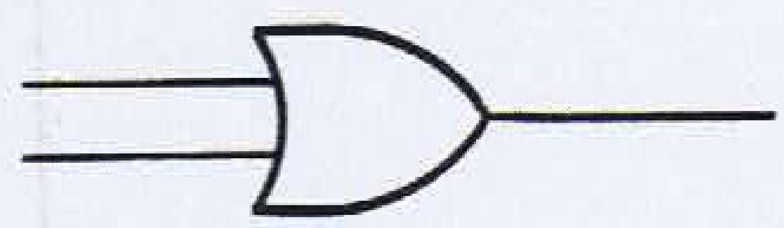
TTL : 7404 C-MOS : 4009

b) Somme logique : Fonction OU (OR en anglais)

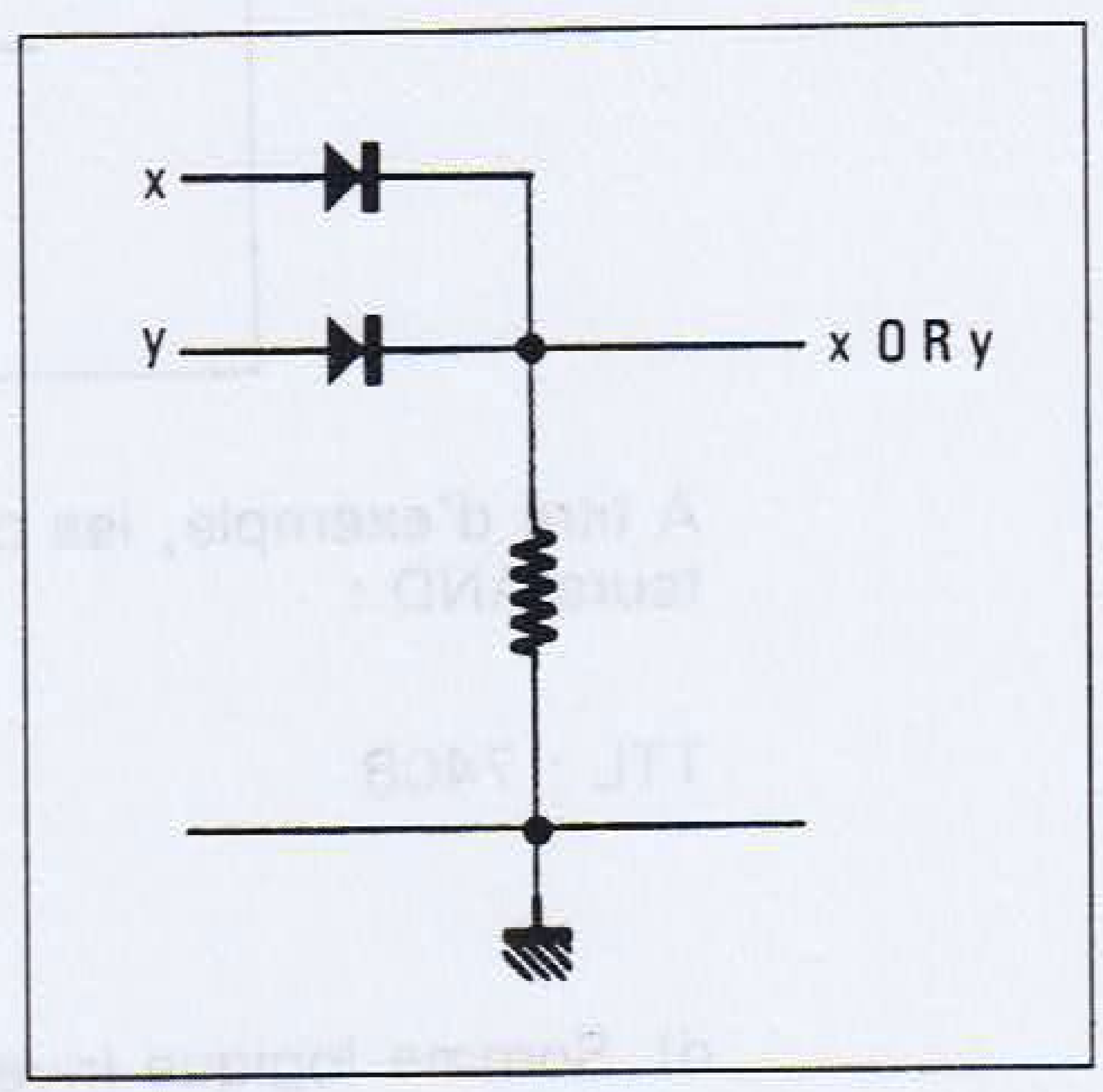
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique OU. La table de vérité de la fonction OU est la suivante : (voir page suivante)

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction OU peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs OR:

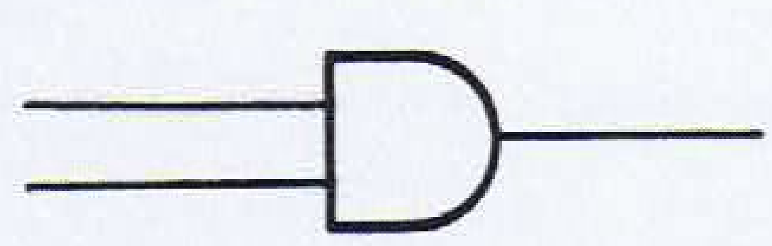
TTL : 7432 C-MOS : 4071

c) Produit logique : Fonction ET (AND en anglais)

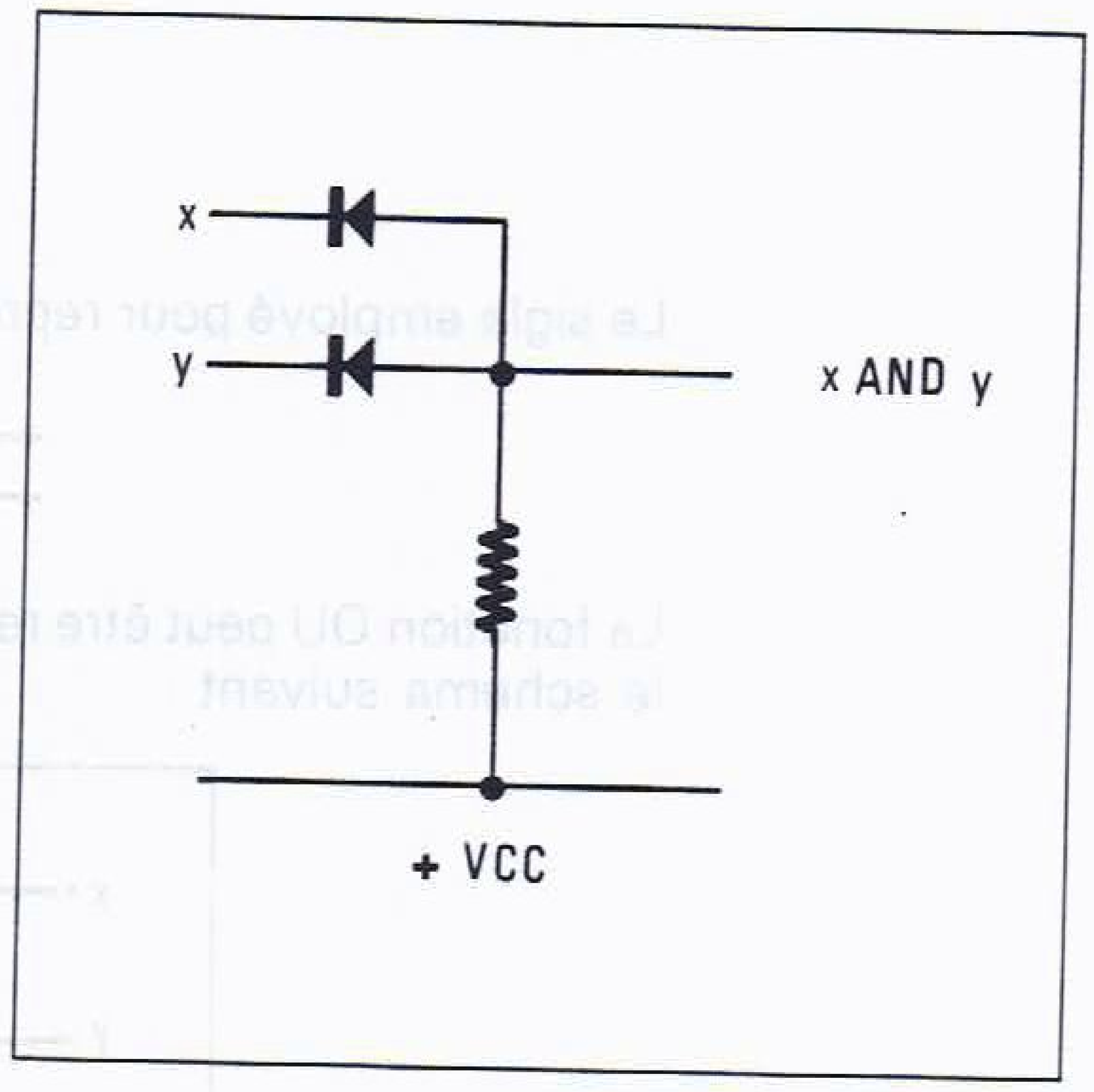
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique ET. La table de vérité de la fonction ET est la suivante :

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction ET peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs AND :

TTL : 7408

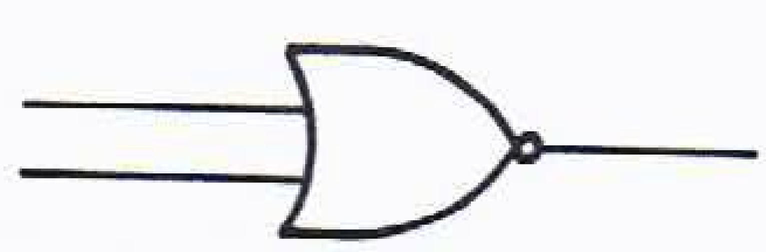
C-MOS : 4073

d) Somme logique inversée : Fonction NON-OU (NOR en anglais)

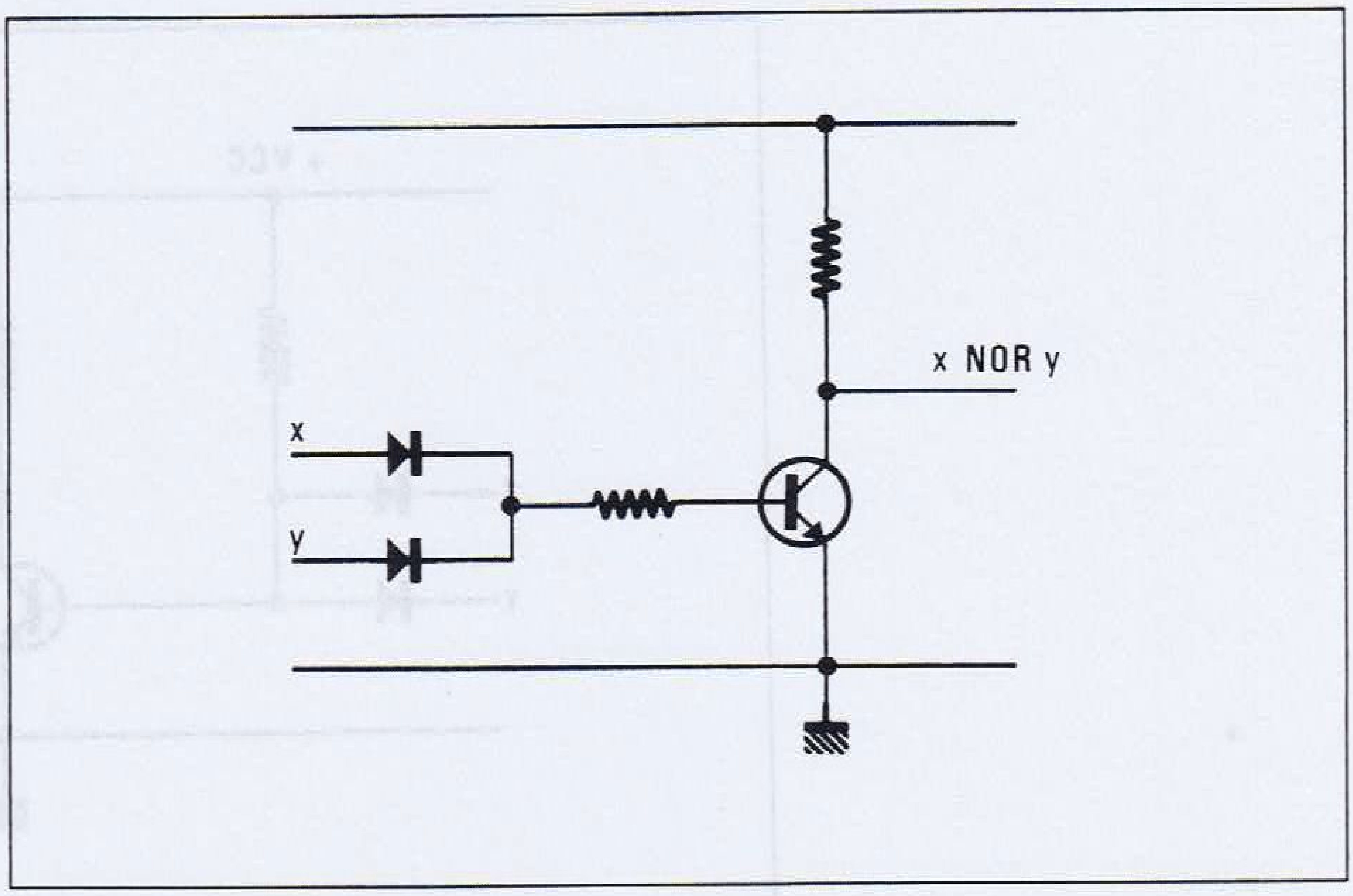
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique OU. La table de vérité de la fonction OU est la suivante :

x	y	x NOR y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction NOR peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs NOR :

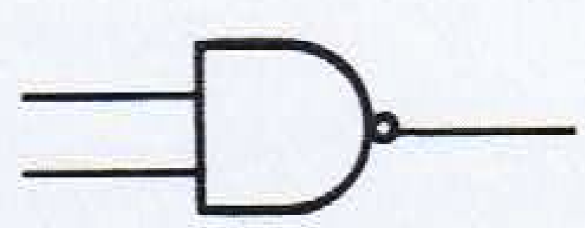
TTL : 7402 C-MOS : 4000

e) Produit logique inversé : Fonction NON-ET (NAND en anglais)

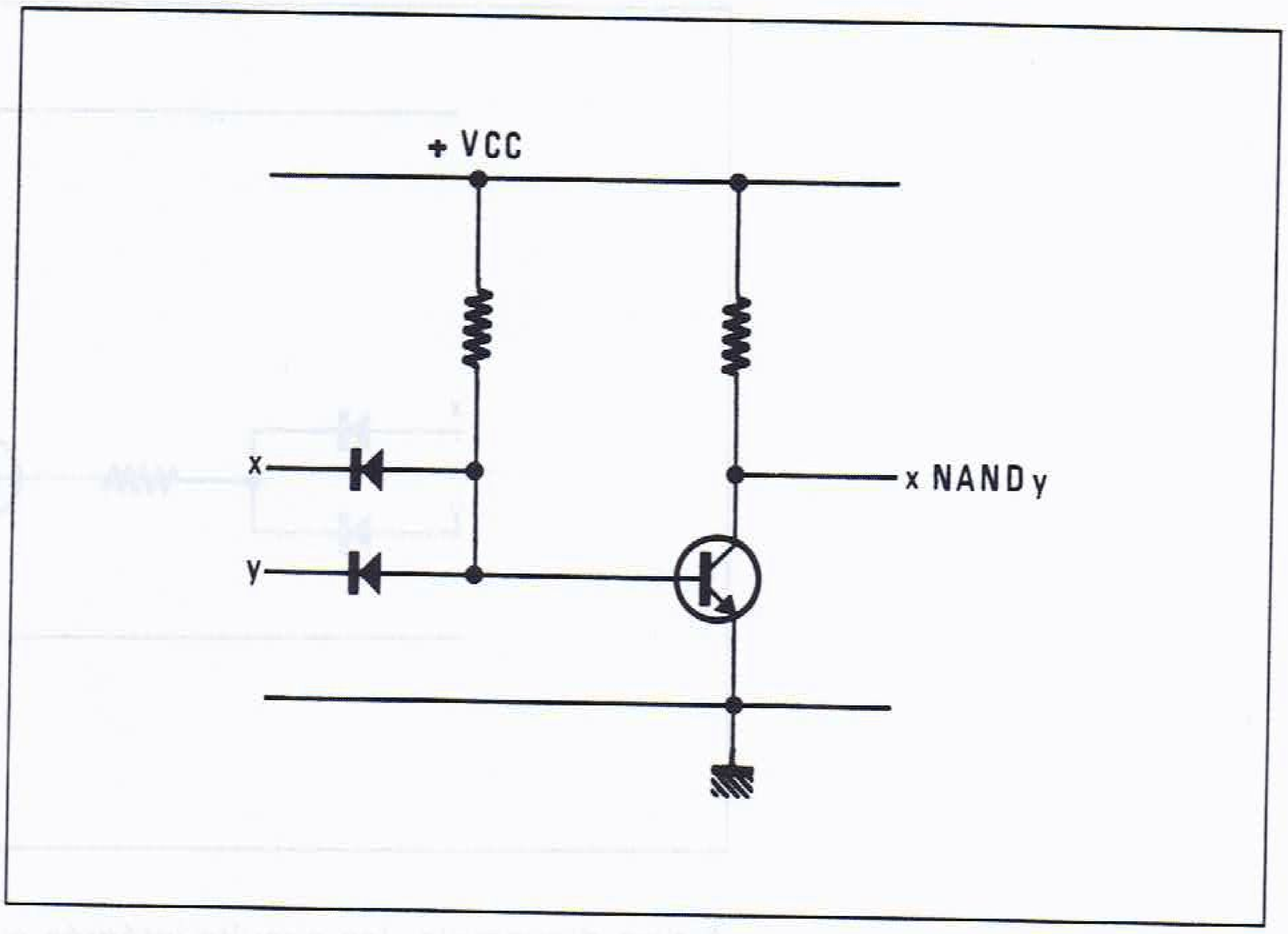
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique NAND. La table de vérité de la fonction NAND est la suivante :

x	y	x NAND y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction NAND peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs NAND :

TTL : 7400 C-MOS : 4011

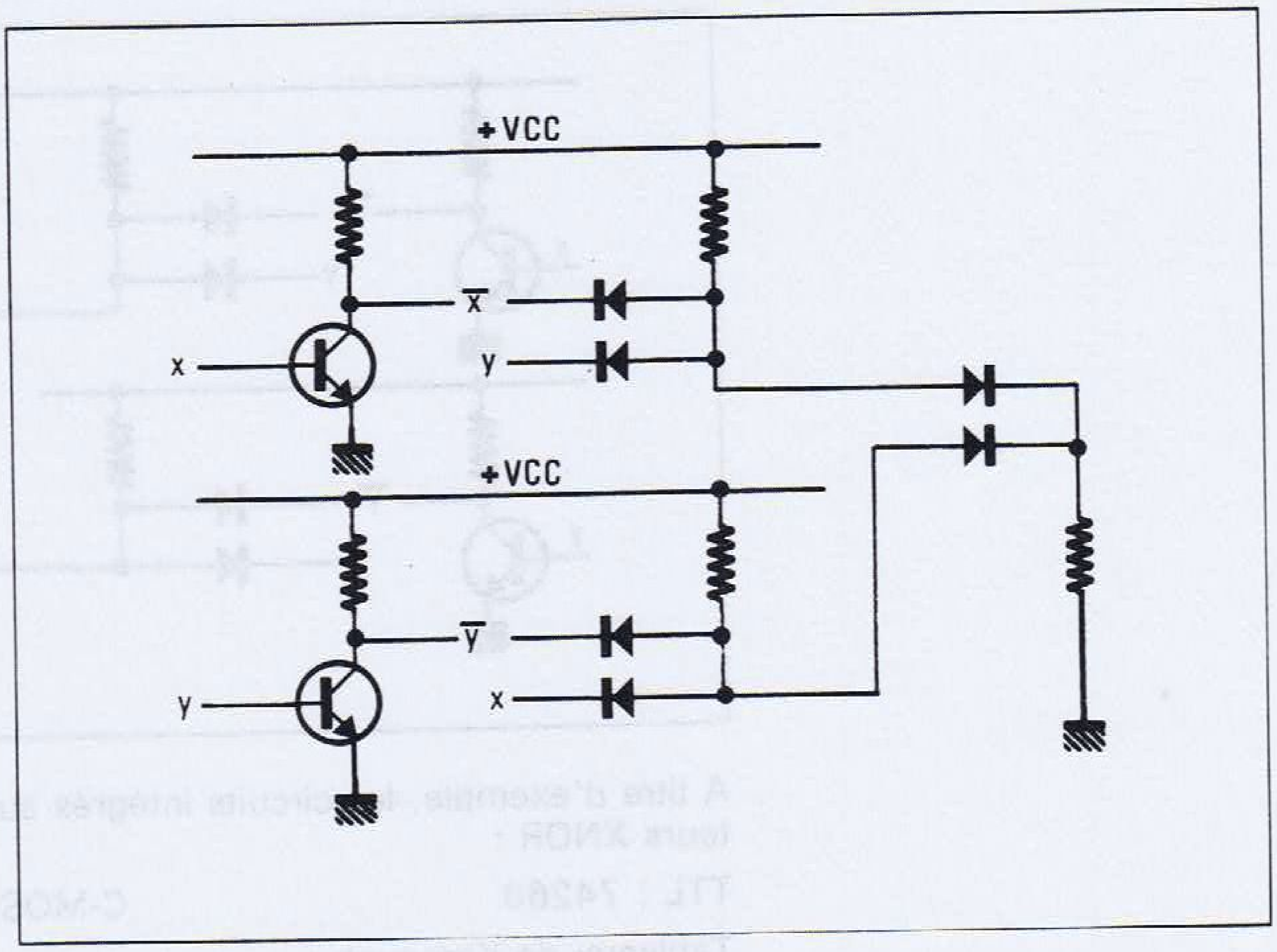
f) OU exclusif : Fonction EX-OU (XOR en anglais)

Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique XOR. La table de vérité de la fonction XOR est la suivante :

x	y	x XOR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :

La fonction XOR peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs XOR :

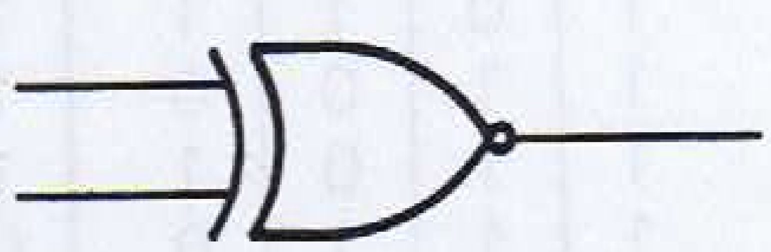
TTL : 7486 C-MOS : 4030

g) OU exclusif inversé : Fonction EX-NON-OU (XNOR en anglais)

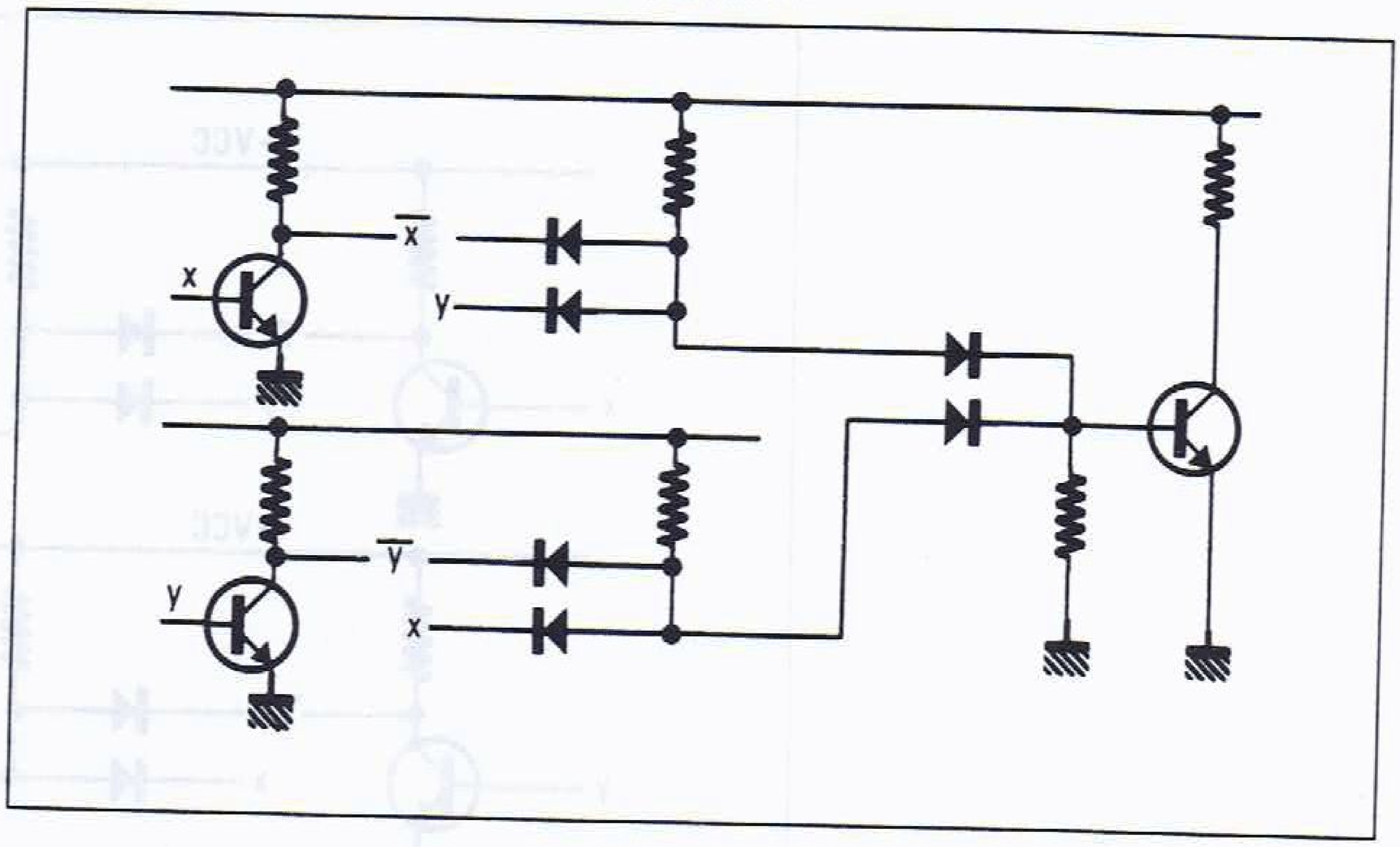
Au moins deux entrées sont nécessaires pour faire fonctionner un opérateur logique XNOR. La table de vérité de la fonction XNOR est la suivante :

x	y	x XNOR y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Le sigle employé pour représenter cette fonction logique est le suivant :



La fonction OU exclusif inversé peut être reproduite avec des composants discrets selon le schéma suivant :



A titre d'exemple, les circuits intégrés suivants regroupent des opérateurs XNOR :

TTL : 74266 C-MOS : 4077

Tableaux de Karnaugh :

Un circuit logique est composé d'une association plus ou moins complexe des circuits élémentaires que nous venons de décrire (NOT, OR, AND, NOR, NAND, XOR, XNOR). Pour minimiser le nombre de fonctions logiques utilisées pour le réaliser, nous utiliserons la méthode de Karnaugh.

Supposons que les variables en entrée soient au nombre de quatre (x, y, z et t), et que la sortie s soit définie de la façon suivante :

x	y	z	t	s
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Cette table de vérité donne lieu au tableau de Karnaugh suivant :

xy \ zt	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

La méthode de simplification consiste à réunir la plus grande puissance de deux possible de « 1 » consécutifs en les encerclant, dans le sens horizontal ou vertical. L'expression logique qui en découle est d'autant plus simple que la surface encerclée est grande.

Par exemple, si nous encadrons la troisième colonne (qui contient 4 « 1 » donc une puissance de deux),

xy \ zt	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

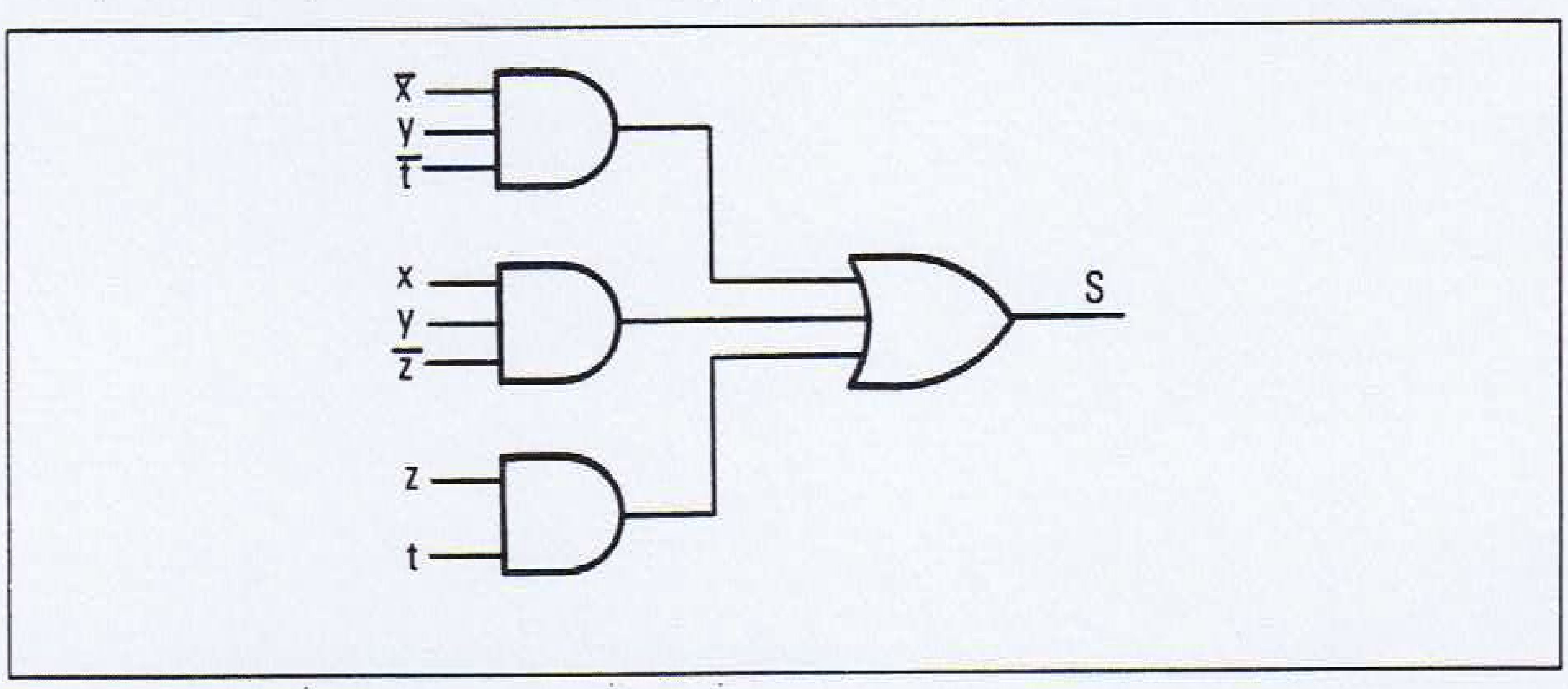
l'équation résultante sera obtenue en extrayant des variables d'entrée celles qui ne bougent pas : ici z et t qui restent à 1 pour toutes les lignes.

L'équation complète sera donnée lorsque tous les 1 seront encerclés au moins une fois. Chaque partie encerclée s'écrit sous forme de produit et correspond à une fonction AND (représenté par un . ou rien du tout comme dans les exemples qui suivent, et deux parties encerclées différentes sont séparées par un opérateur OR (représenté par un +).)

xy \ zt	00	01	11	10
00	0	0	1	0
01	1	0	1	1
11	1	1	1	0
10	0	0	1	0

D'où l'équation $S = \bar{x}y\bar{t} + xy\bar{z} + zt$

Ce qui correspond au circuit logique suivant :



Exemples de recherche de fonction

Soit la table de vérité suivante :

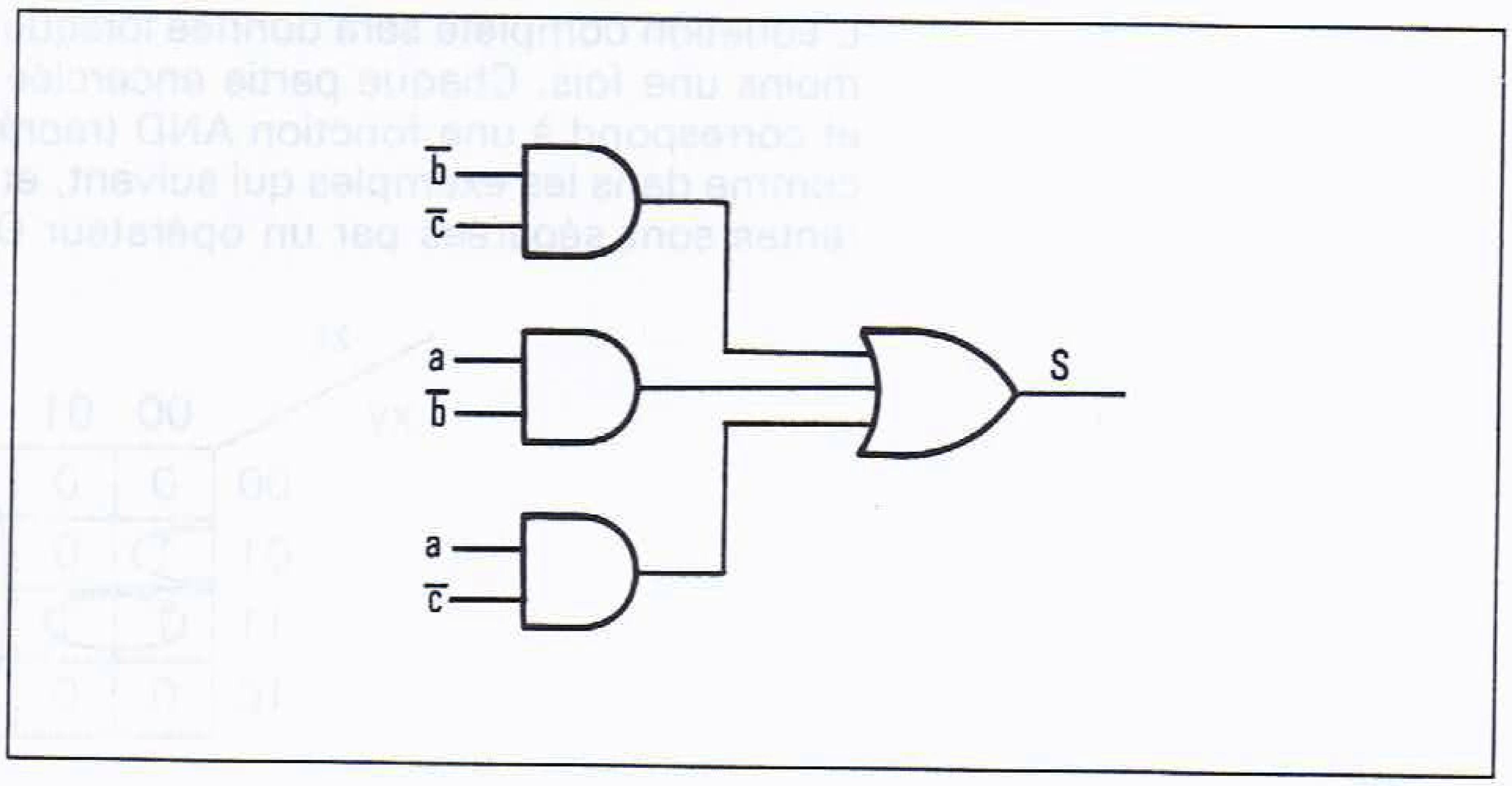
a	b	c	s
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Cette table de vérité donne lieu au tableau de Karnaugh suivant :

a \ bc	00	01	11	10
0	1	0	0	0
1	1	1	0	1

D'où l'équation de la sortie : $S = \bar{b}\bar{c} + a\bar{b} + a\bar{c}$

Ce qui correspond au circuit logique suivant :



Soit la table de vérité suivante :

a	b	c	d	e	s
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0
1	1	1	1	1	1

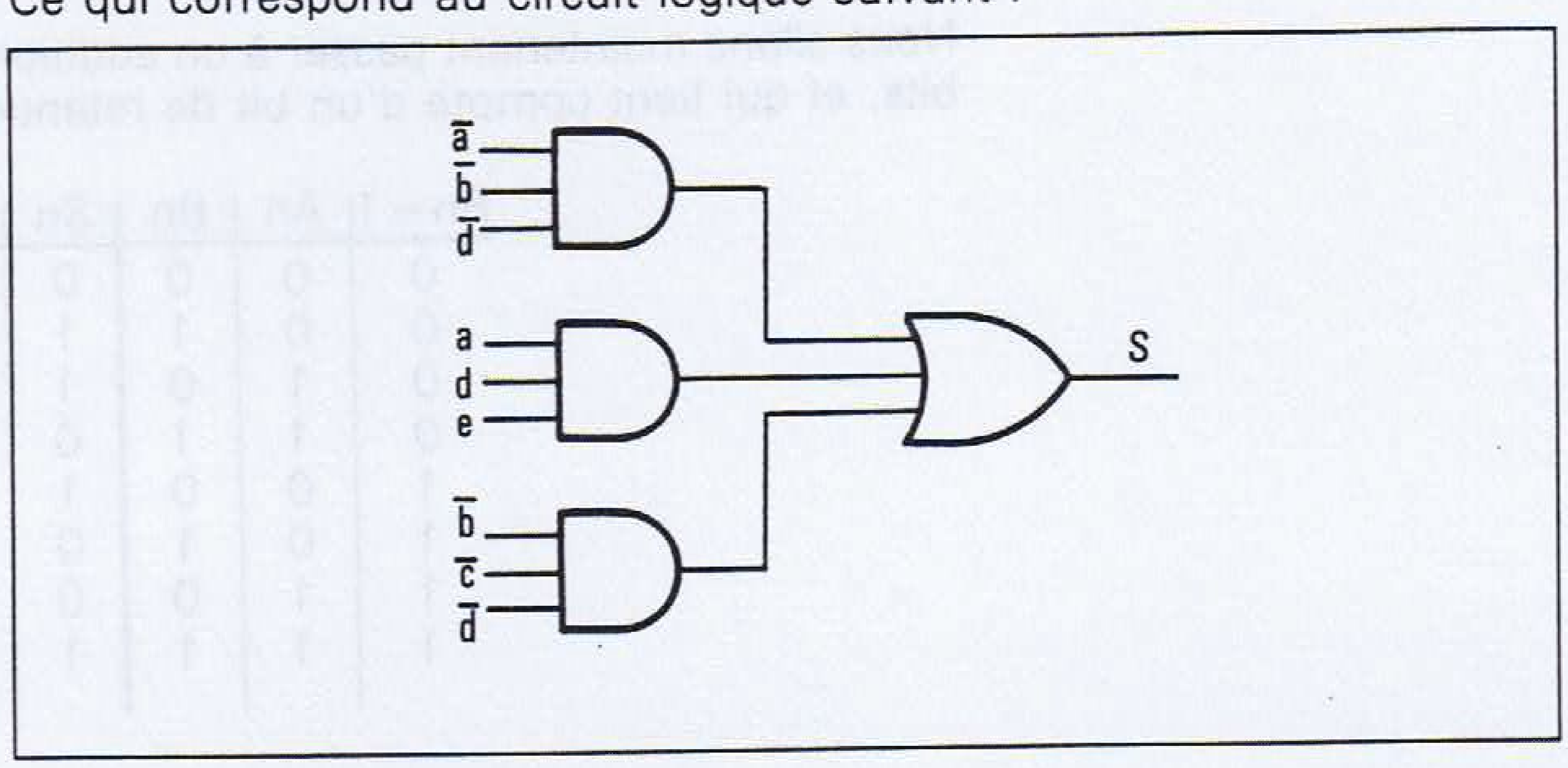
Cette table de vérité donne lieu au tableau de Karnaugh suivant :

abc \ de	00	01	11	10
000	1	1	0	0
001	1	1	0	0
011	0	0	0	0
010	0	0	0	0
110	0	0	1	0
111	0	0	1	0
101	0	0	1	0
100	1	1	1	0

D'où l'équation de sortie :

$$S = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{d} + ade + \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{d}$$

Ce qui correspond au circuit logique suivant :



C. LOGIQUE COMBINATOIRE

Les unités logiques et arithmétiques (ULA) des microprocesseurs travaillent en binaire et font sur les nombres manipulés des opérations arithmétiques.

Nous allons étudier le fonctionnement de circuits :

- additionneurs et soustracteurs binaires ;
- décodeurs ;
- multiplexeurs et démultiplexeurs.

Addition binaire

Dans un premier temps, nous allons nous restreindre à l'addition de deux bits a et b, donnant lieu à un résultat S sur un bit et à une retenue R :

a	b	S	R
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

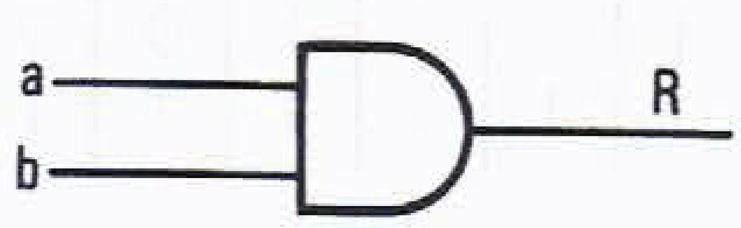
L'équation de la sortie est la suivante :

$S = \overline{a}b + a\overline{b}$ soit $S = a \text{ XOR } b$

L'équation de la retenue est la suivante :

$R = ab$

Nous voyons donc qu'un circuit logique additionneur à un bit peut se représenter de la manière suivante :



Nous allons maintenant passer à un additionneur qui travaille sur deux bits, et qui tient compte d'un bit de retenue :

Rn – 1	An	Bn	Sn	Rn
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

L'équation de la sortie est la suivante :

$$Sn = (An \oplus Bn)\ \overline{Rn-1} + \overline{(An \oplus Bn)}\ Rn-1$$

Cette équation se simplifie en :

$$Sn = An \oplus Bn \oplus Rn-1$$

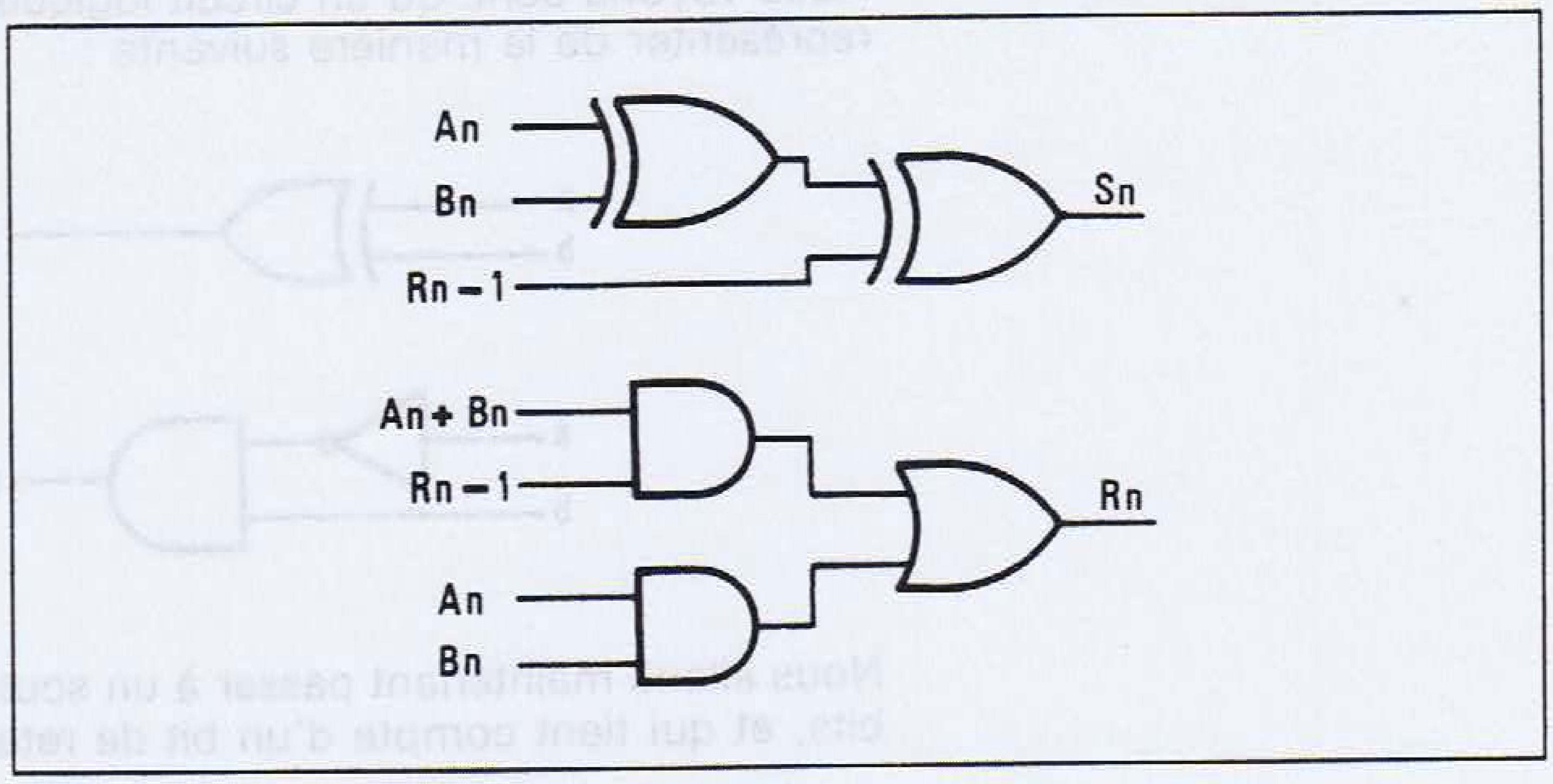
L'équation de la retenue est la suivante :

$$Rn = \overline{Rn-1}\ (An \oplus Bn) + Rn-1\ \overline{(An \oplus Bn)}$$

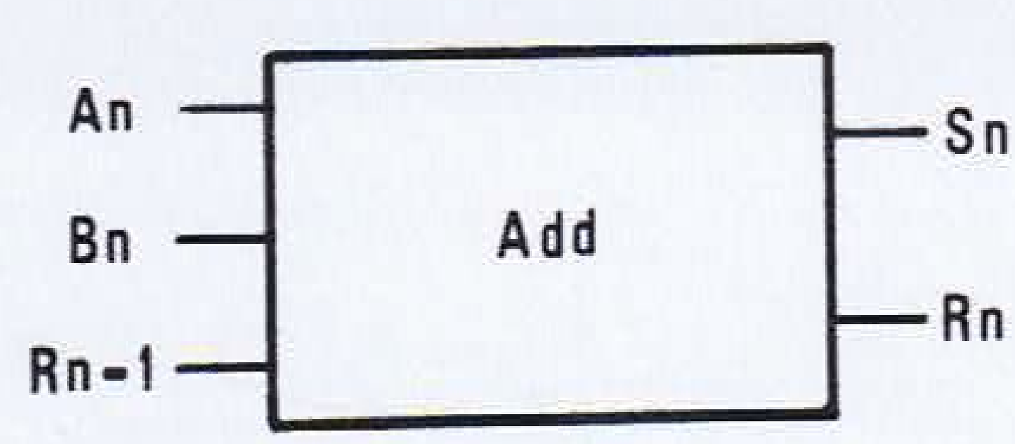
Cette équation se simplifie en :

$$Rn = Rn-1\ (An \oplus Bn) + AnBn$$

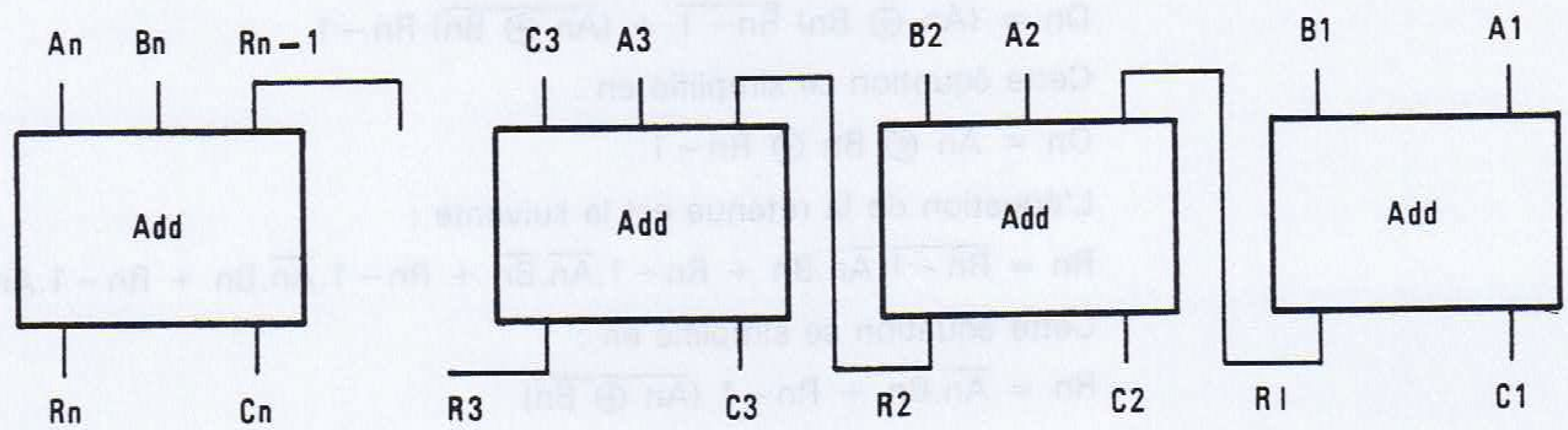
Nous voyons donc qu'un circuit logique additionneur à deux bits peut se représenter de la manière suivante :



Si nous prenons la convention de représentation suivante :



un additionneur à n bits se représentera de la manière suivante :



Soustraction binaire

Dans un premier temps, nous allons nous restreindre à la soustraction de deux bits a et b, donnant lieu à un résultat D sur un bit et à une retenue R :

a	b	D	R
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	0	0

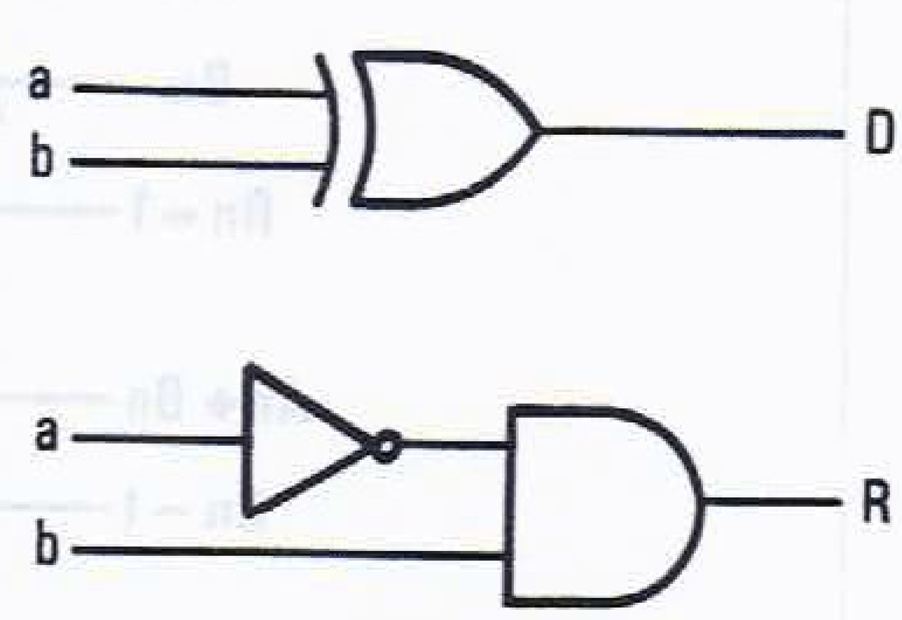
L'équation de la sortie est la suivante :

$D = \bar{a}b + a\bar{b}$ soit $S = a$ XOR b

L'équation de la retenue est la suivante :

$R = \bar{a}b$

Nous voyons donc qu'un circuit logique soustracteur à un bit peut se représenter de la manière suivante :



Nous allons maintenant passer à un soustracteur qui travaille sur deux bits, et qui tient compte d'un bit de retenue.

Rn – 1	An	Bn	Dn	Rn
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

L'équation de la sortie est la suivante :

$$Dn = (An \oplus Bn)\,\overline{Rn-1} + \overline{(An \oplus Bn)}\,Rn-1$$

Cette équation se simplifie en :

$$Dn = An \oplus Bn \oplus Rn-1$$

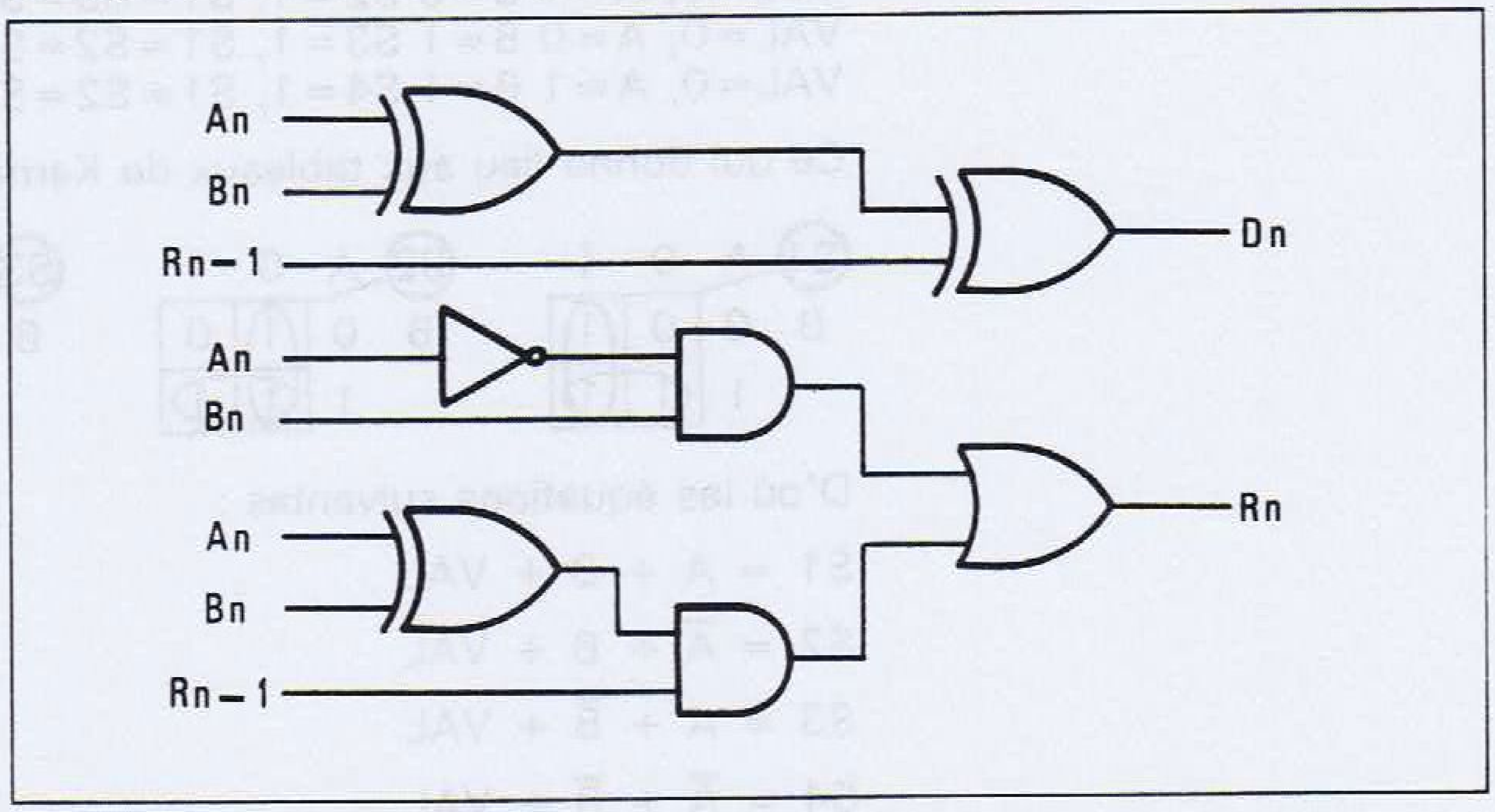
L'équation de la retenue est la suivante :

$$Rn = \overline{Rn-1}.\overline{An}.Bn + Rn-1.\overline{An}.\overline{Bn} + Rn-1.\overline{An}.Bn + Rn-1.An.Bn$$

Cette équation se simplifie en :

$$Rn = \overline{An}.Bn + Rn-1\,\overline{(An \oplus Bn)}$$

Nous voyons donc qu'un circuit logique soustracteur à deux bits peut se représenter de la manière suivante :



Circuits décodeurs (sélecteurs de sorties)

Définition

Un décodeur est un circuit combinatoire à l'entrée duquel on applique un code binaire de n bits. Le décodeur a N sorties (N = 2↑n). Sa particularité est de délivrer pour chaque code en entrée une seule sortie à l'état inverse de toutes les autres.

Remarque :

Une entrée spéciale appelée VALidation est souvent présente sur un circuit décodeur. Elle permet d'autoriser/interdire le fonctionnement du circuit.

Pour ce décodeur ultra simple, nous pourrons avoir les conventions suivantes :

VAL = 1, toutes les sorties sont à 1 quels que soient les codes en entrée A et B

VAL = 0, A = 0 B = 0 S1 = 1, S2 = S3 = S4 = 1
VAL = 0, A = 1 B = 0 S2 = 1, S1 = S3 = S4 = 1
VAL = 0, A = 0 B = 1 S3 = 1, S1 = S2 = S4 = 1
VAL = 0, A = 1 B = 1 S4 = 1, S1 = S2 = S3 = 1

Ce qui donne lieu aux tableaux de Karnaugh suivants :

S1	A 0	1
B 0	0	1
1	1	1

S2	A 0	1
B 0	1	0
1	1	1

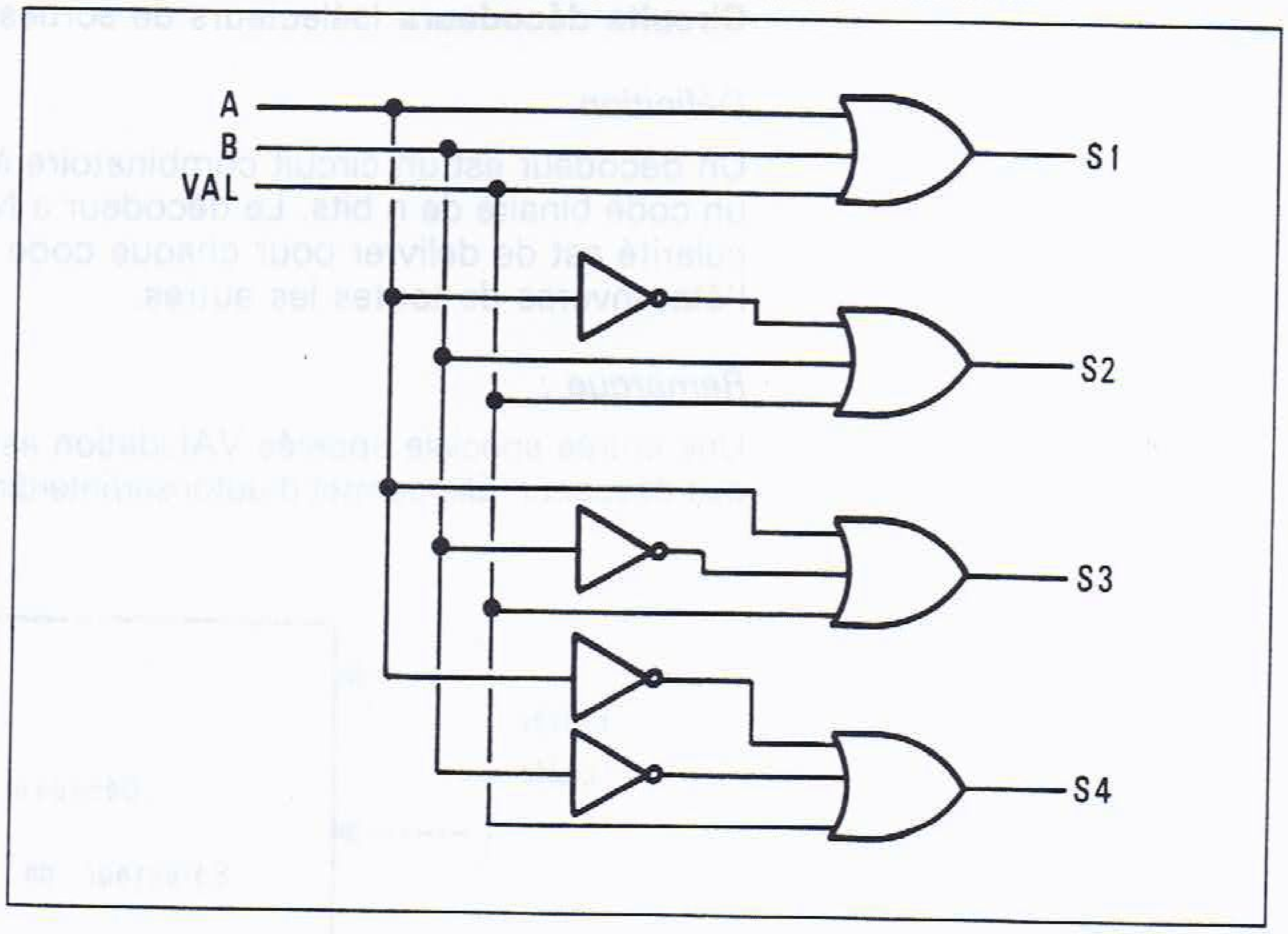
S3	A 0	1
B 0	1	1
1	0	1

S4	A 0	1
B 0	1	1
1	1	0

D'où les équations suivantes :

$$S1 = A + B + VAL$$
$$S2 = \overline{A} + B + VAL$$
$$S3 = A + \overline{B} + VAL$$
$$S4 = \overline{A} + \overline{B} + VAL$$

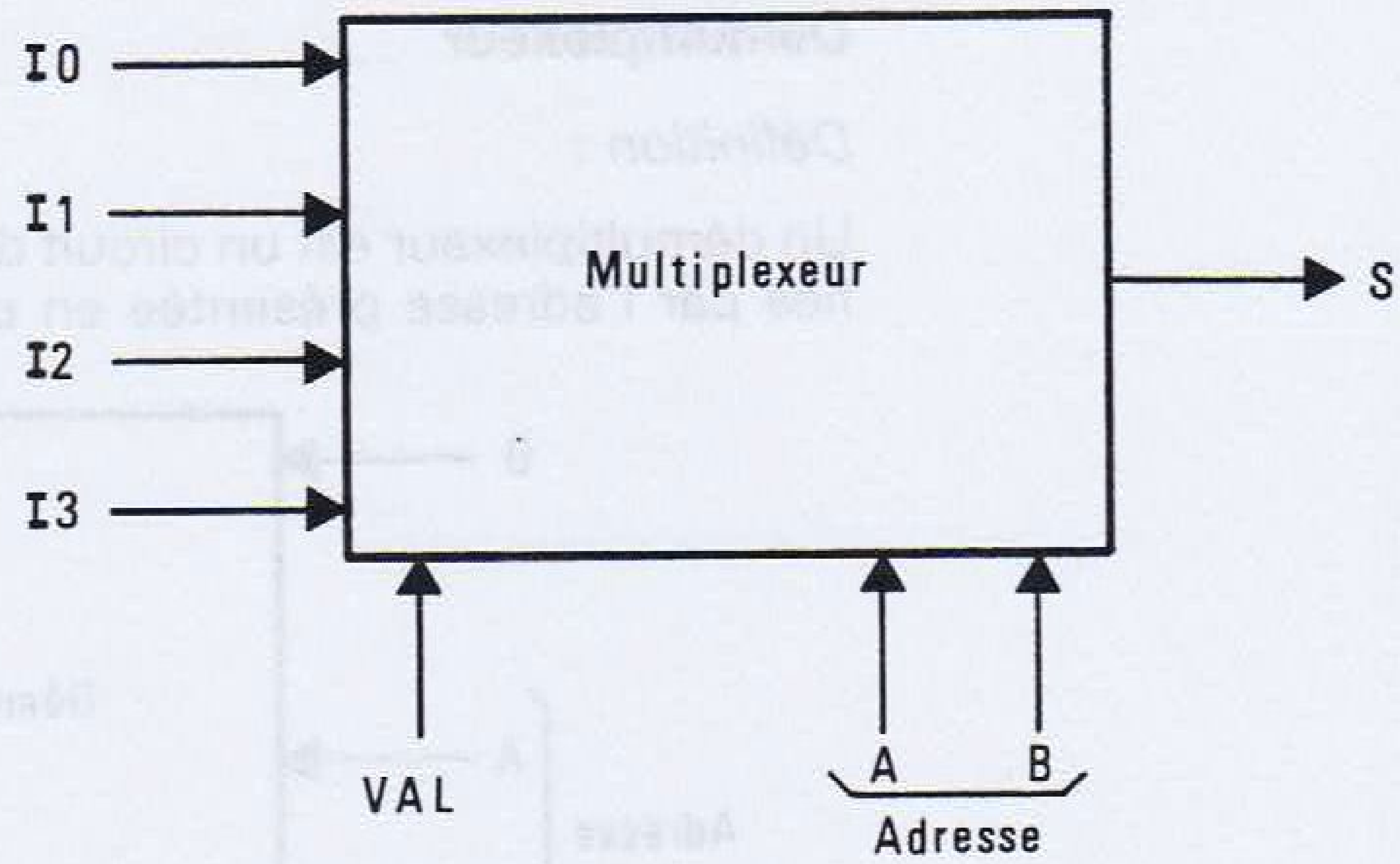
Un tel circuit se représente donc de la manière suivante :



Multiplexeur

Définition :

Un multiplexeur est un circuit qui possède n entrées et qui transmet sur sa sortie S une de ces entrées au choix. Pour sélectionner cette entrée, le circuit multiplexeur reçoit une adresse en entrée. Comme pour le circuit précédent, une entrée VALidation est souvent disponible. Cette entrée permet d'autoriser/interdire le fonctionnement du circuit.



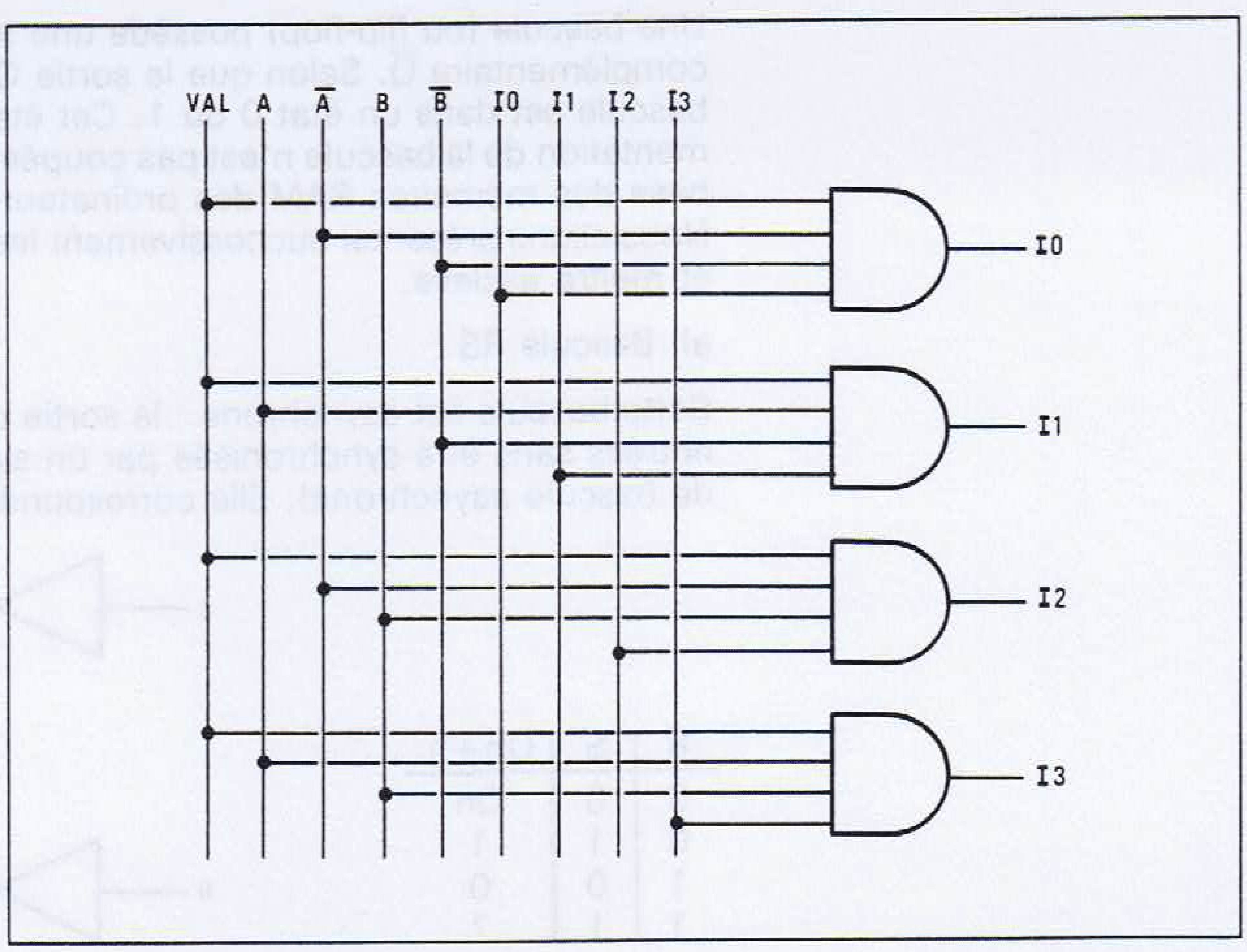
Pour ce multiplexeur ultra simple, nous pourrons avoir les conventions suivantes :

VAL = 0. La sortie est à 0 quelles que soient les valeurs envoyées sur les adresses.

VAL = 1. Le multiplexage est autorisé.

A = B = 0	S = I0
A = 1, B = 0	S = I1
A = 0, B = 1	S = I2
A = B = 1	S = I3

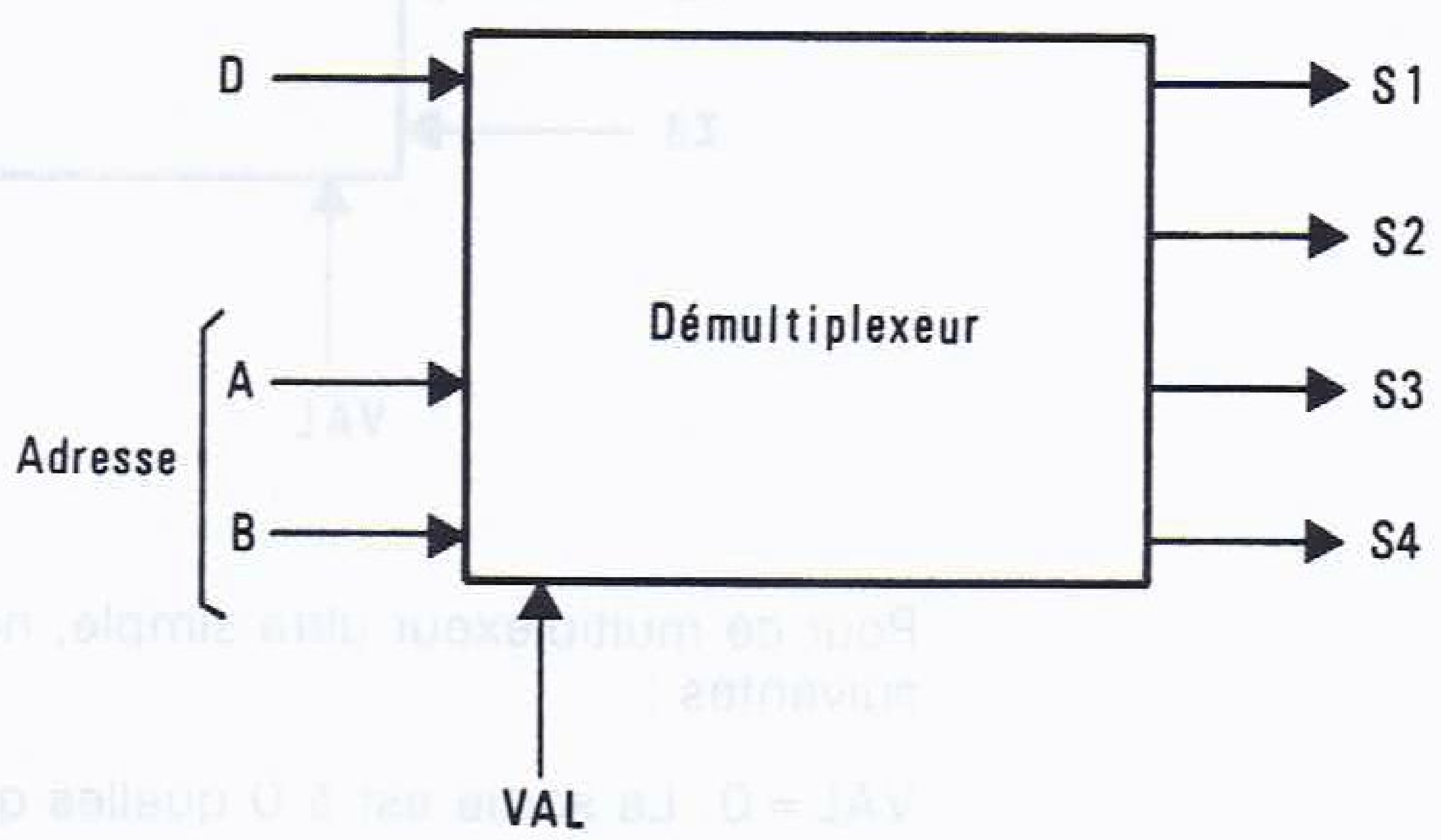
Ce qui donne lieu au circuit logique suivant :



Démultiplexeur

Définition :

Un démultiplexeur est un circuit de décodage dans lequel la ligne identifiée par l'adresse présentée en entrée est reliée à l'entrée D.



Logique séquentielle

Comme il a été dit plus haut, la logique séquentielle implique que la sortie à un instant t dépend de l'état des variables d'entrée à cet instant et de l'état des sorties au temps $t-1$.

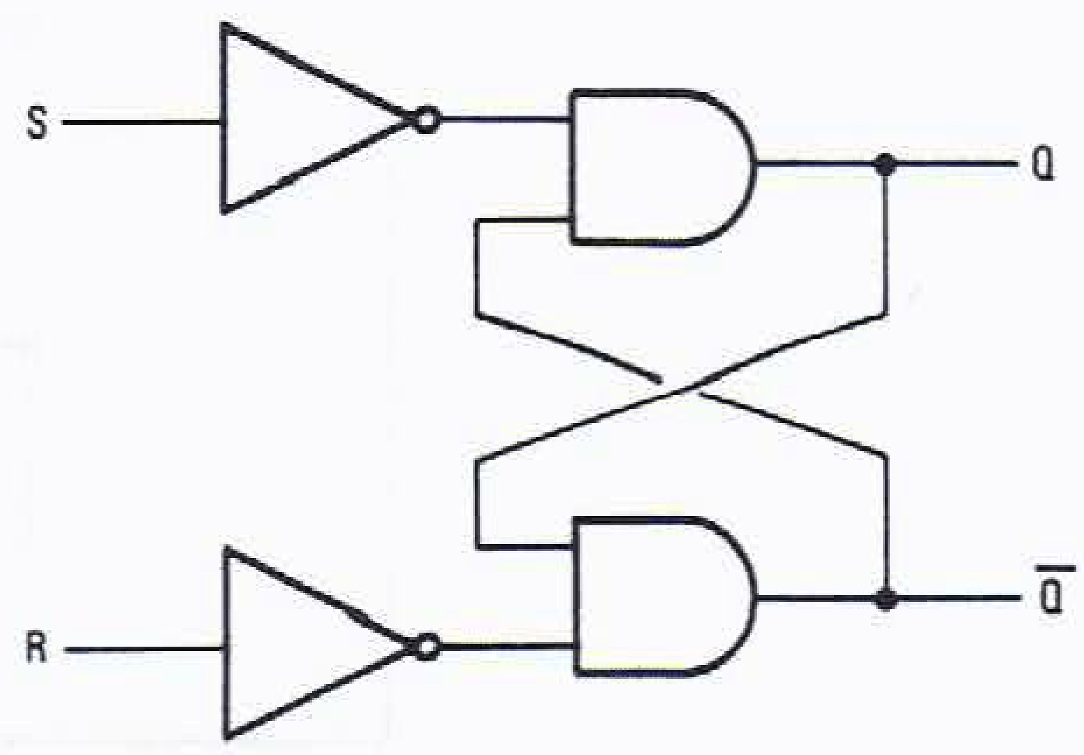
Nous allons étudier le fonctionnement des bascules et des registres qui sont des circuits régis par la logique séquentielle.

Bascules

Une bascule (ou flip-flop) possède une sortie Q et éventuellement son complémentaire $\overline{Q}$. Selon que la sortie Q est à 0 ou à 1, on dit que la bascule est dans un état 0 ou 1. Cet état est mémorisé tant que l'alimentation de la bascule n'est pas coupée. Une bascule est l'élément de base des mémoires RAM des ordinateurs.
Nous allons présenter successivement les bascules de type RS, RST, D et maître esclave.

a) Bascule RS :

Cette bascule est asynchrone : la sortie change d'état en fonction des entrées sans être synchronisée par un signal d'horloge (d'où le terme de bascule asynchrone). Elle correspond au schéma suivant :



R	S	Qn+1
0	0	Qn
0	1	1
1	0	0
1	1	?

L'équation de la bascule RS est donc : $Q_{n+1} = \overline{R}\,.\,\overline{S}\,.\,Q_n + \overline{R}\,.\,S + R.S$

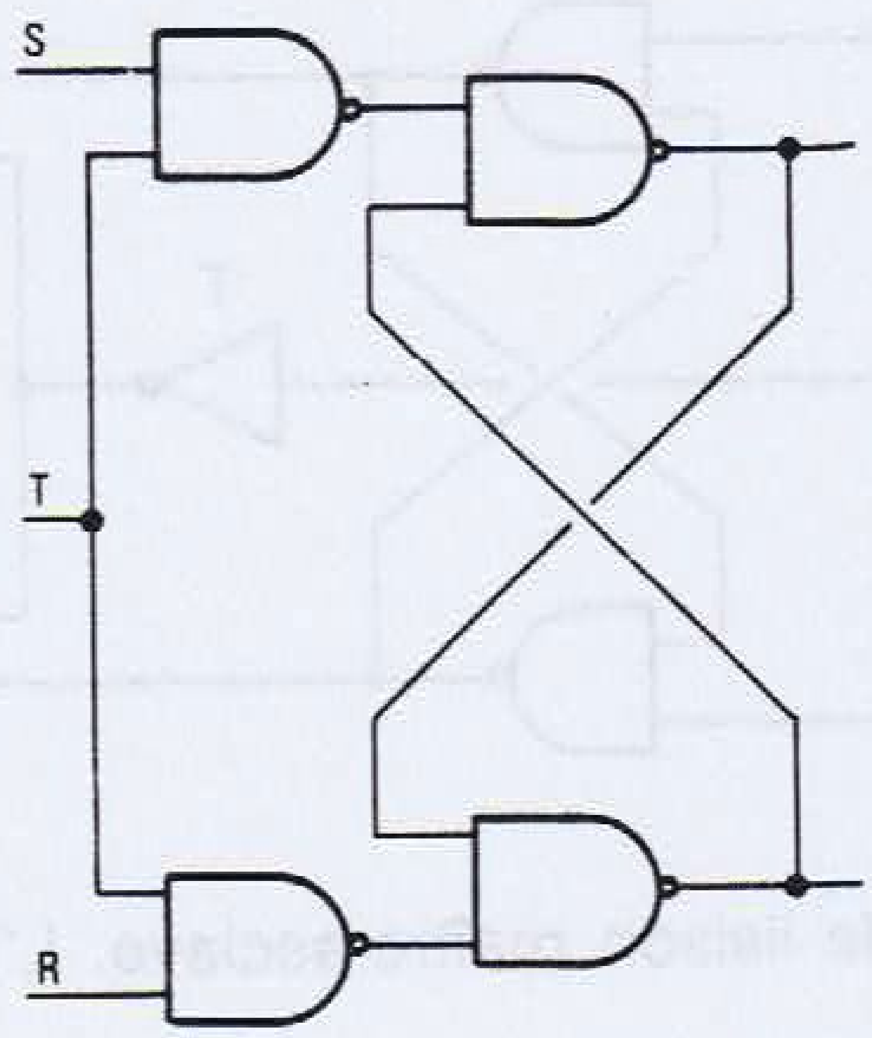
Qn \ RS	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	1	0

Cette équation se simplifie donc en : $Q_{n+1} = S + Q_n.\overline{R}$

b) Bascule RST :

Cette bascule est synchrone : la sortie change d'état en fonction des entrées en étant synchronisée par un signal d'horloge (d'où le terme de bascule synchrone).

Elle correspond au schéma suivant :



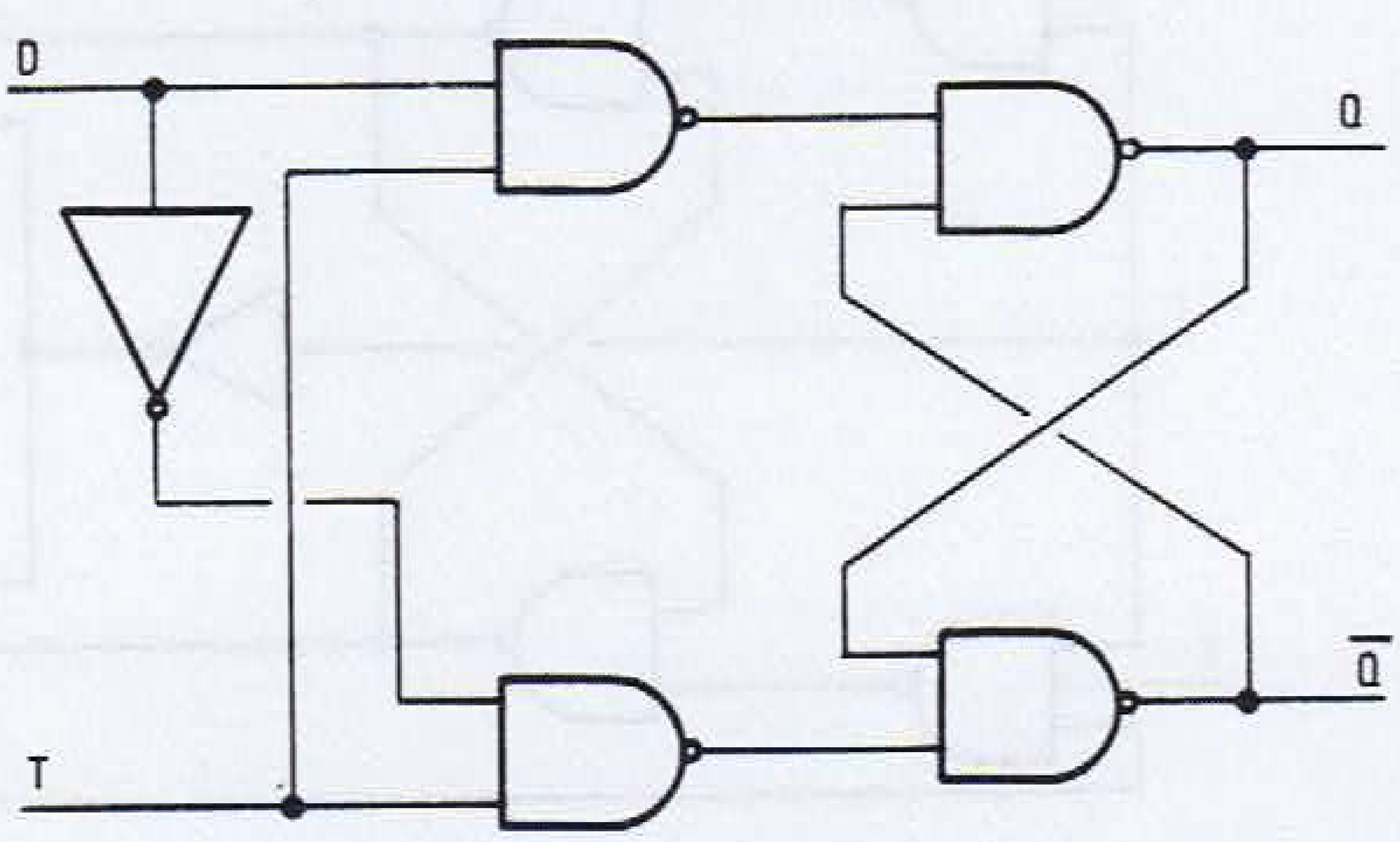
R	S	Qn + 1
0	0	Qn
0	1	1
1	0	0
1	1	?

Les entrées R et S ne sont prises en compte par la bascule qu'au front montant de l'horloge.

L'équation de la bascule RST est la même que celle de la bascule RS.

c) Bascule D :

Elle correspond au schéma suivant :



D	Q
0	0
1	1

d) Bascule Maître/Esclave :

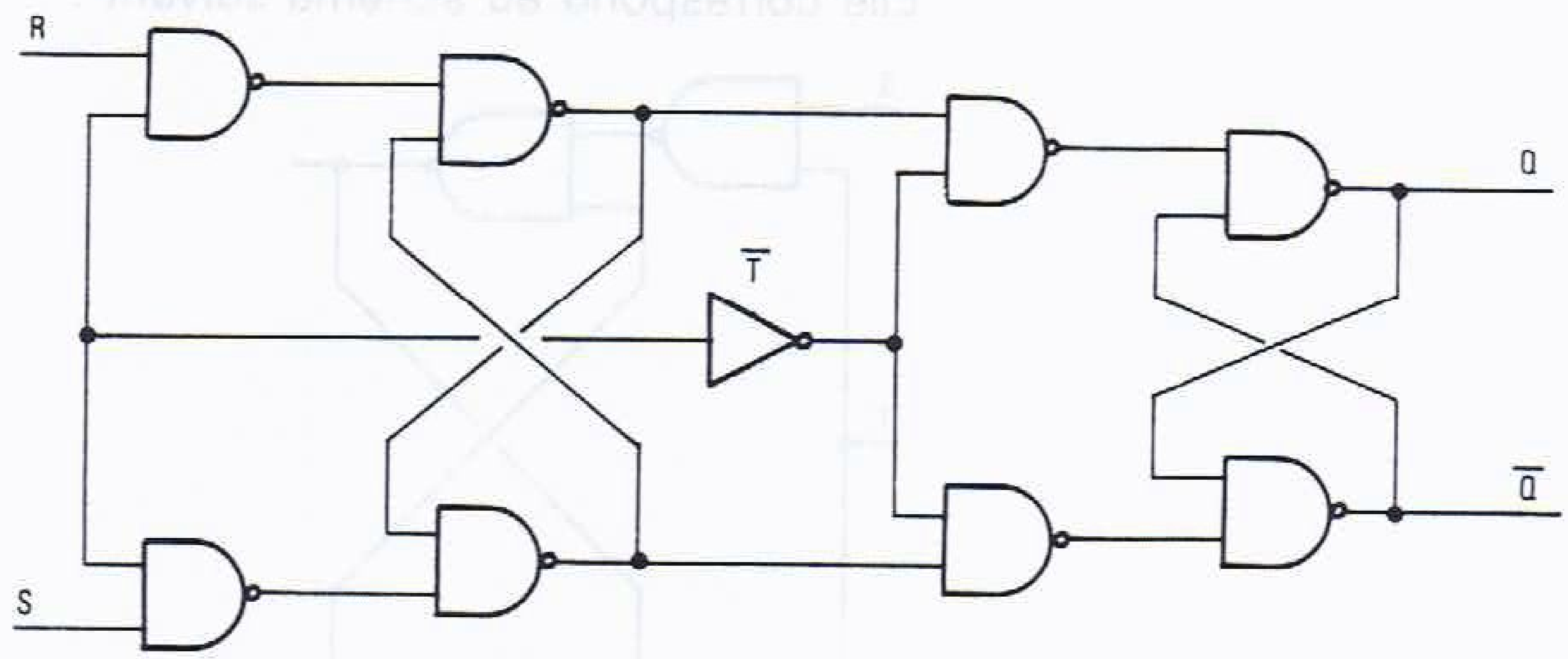
Ces bascules sont composées de deux « étages » :

— un étage dit maître recevant les informations sur deux entrées RS ou JK

— un étage dit esclave commandé à partir de l'étage maître et qui délivre les informations à la sortie de la bascule.

Les opérations se déroulent dans l'ordre chronologique suivant :
— maître et esclave isolés ;
— introduction de l'information dans l'étage maître ;
— déconnexion des entrées ;
— transfert de l'information du maître vers l'esclave.

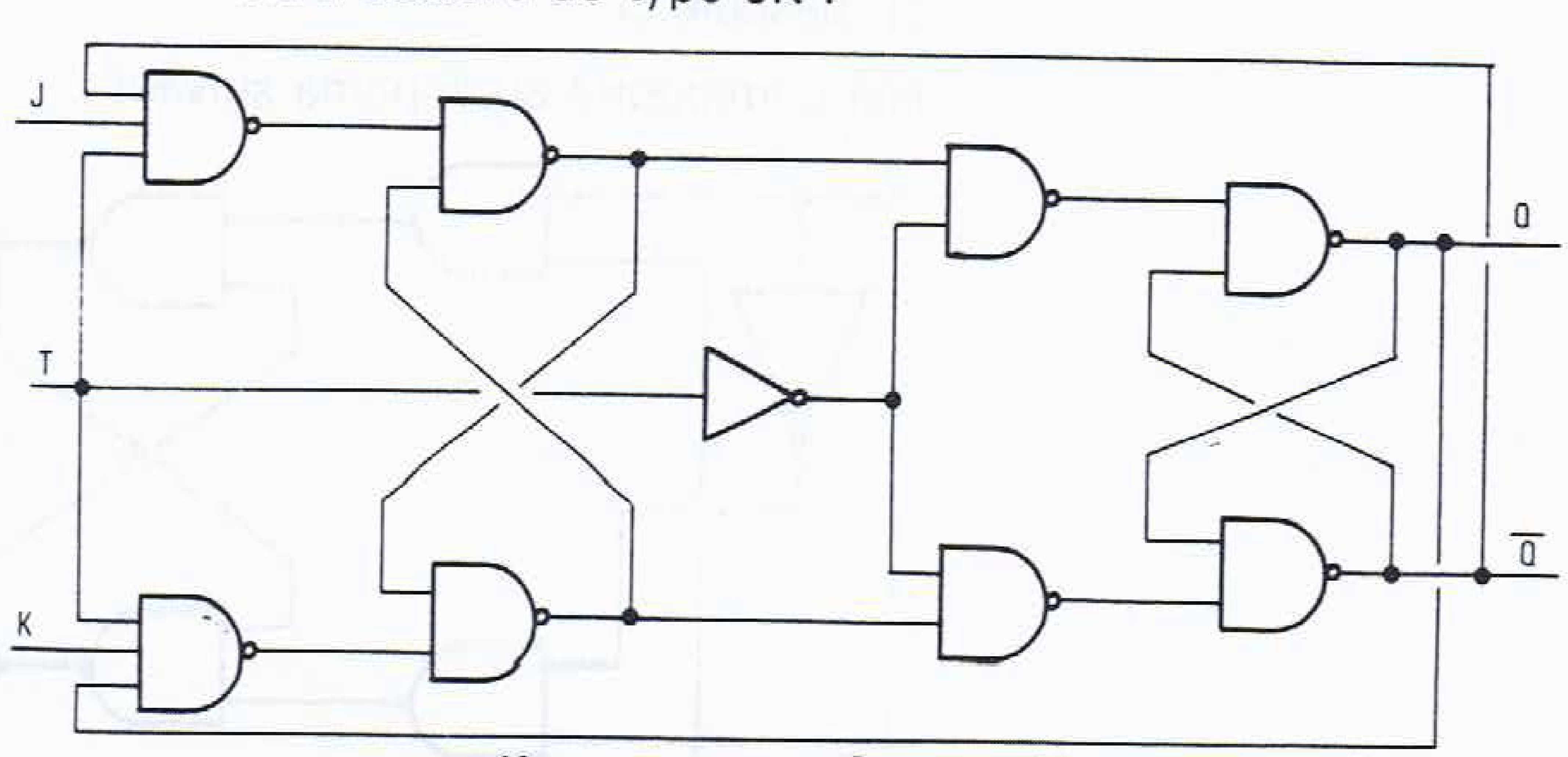
e) Bascule Maître/Esclave de type RS :



T = 1 : Pas de liaison maître-esclave. L'information reste dans l'étage maître.

T = 0 : L'information est transférée de l'étage maître vers l'étage esclave. Cette information est disponible en sortie et les entrées sont ignorées. La table de vérité d'une telle bascule est identique à celle de la bascule RST.

Bascule Maître/Esclave de type JK :



Le principe est le même que pour la bascule maître/esclave de type RS, à ceci près que le cas R = S = 1 (ici J = K = 1) donne une sortie bien définie :

J	K	Qn + 1
0	0	Qn
0	1	0
1	1	$\overline{Qn}$
1	0	1

Registres à décalage

Définition :

Un registre à décalage est composé de n bascules (n> = 2). Il peut donc emmagasiner une information de n bits. L'état logique de la bascule de rang i est transmis à la bascule de rang i + 1 de manière synchrone en utilisant un signal d'horloge.

- Entrées/Sorties d'un registre

L'entrée d'un registre peut être :

— série : les informations sont présentées bit par bit à l'entrée de la première bascule. A chaque impulsion d'horloge, le bit est transmis à la bascule suivante.

— parallèle : tous les bits sont introduits en même temps dans le registre.

La sortie d'un registre peut être :

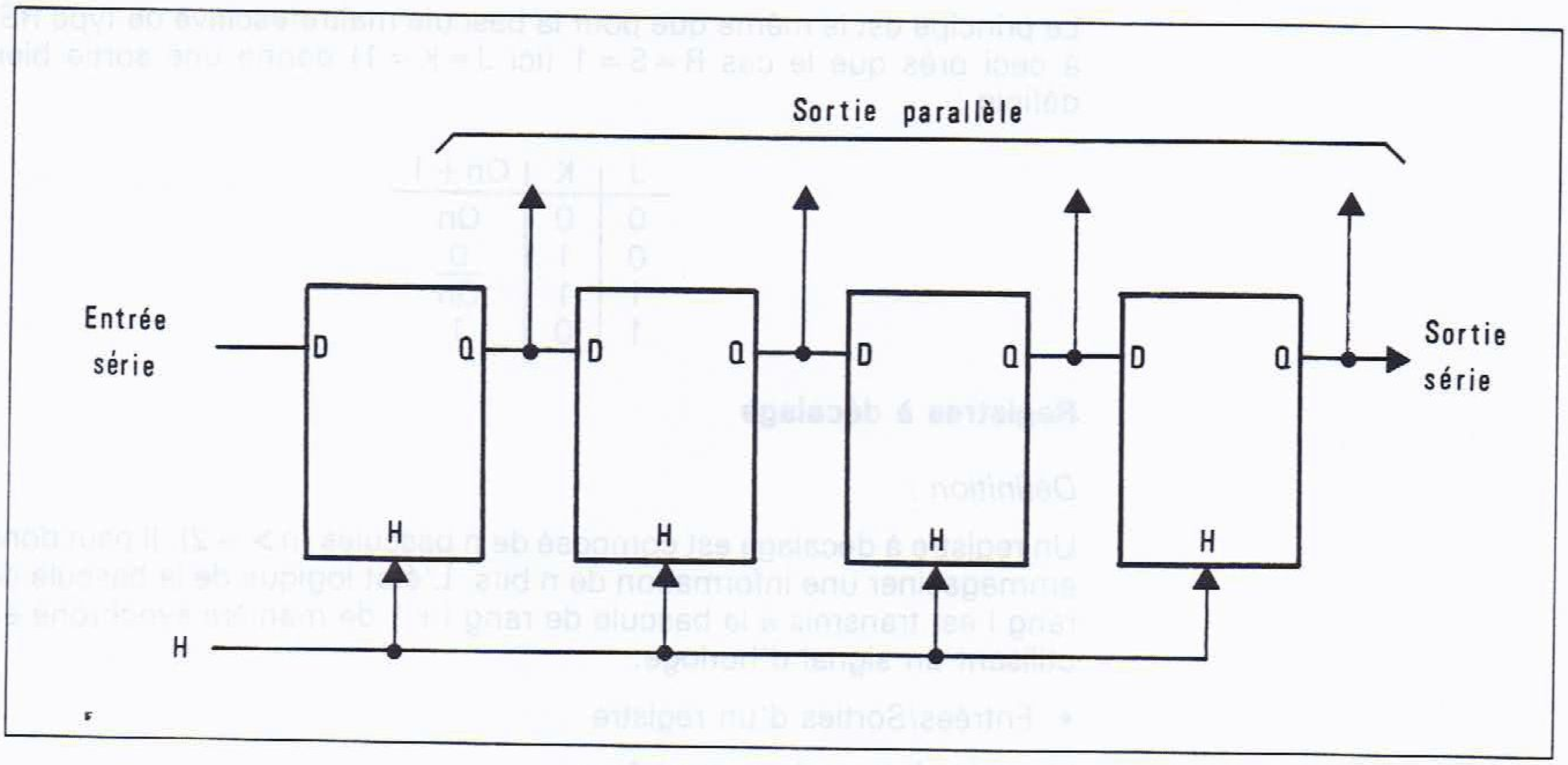
— série : l'information est sortie bit par bit sur la dernière bascule ;

— parallèle : toutes les sorties du registre sont accessibles à tout moment.

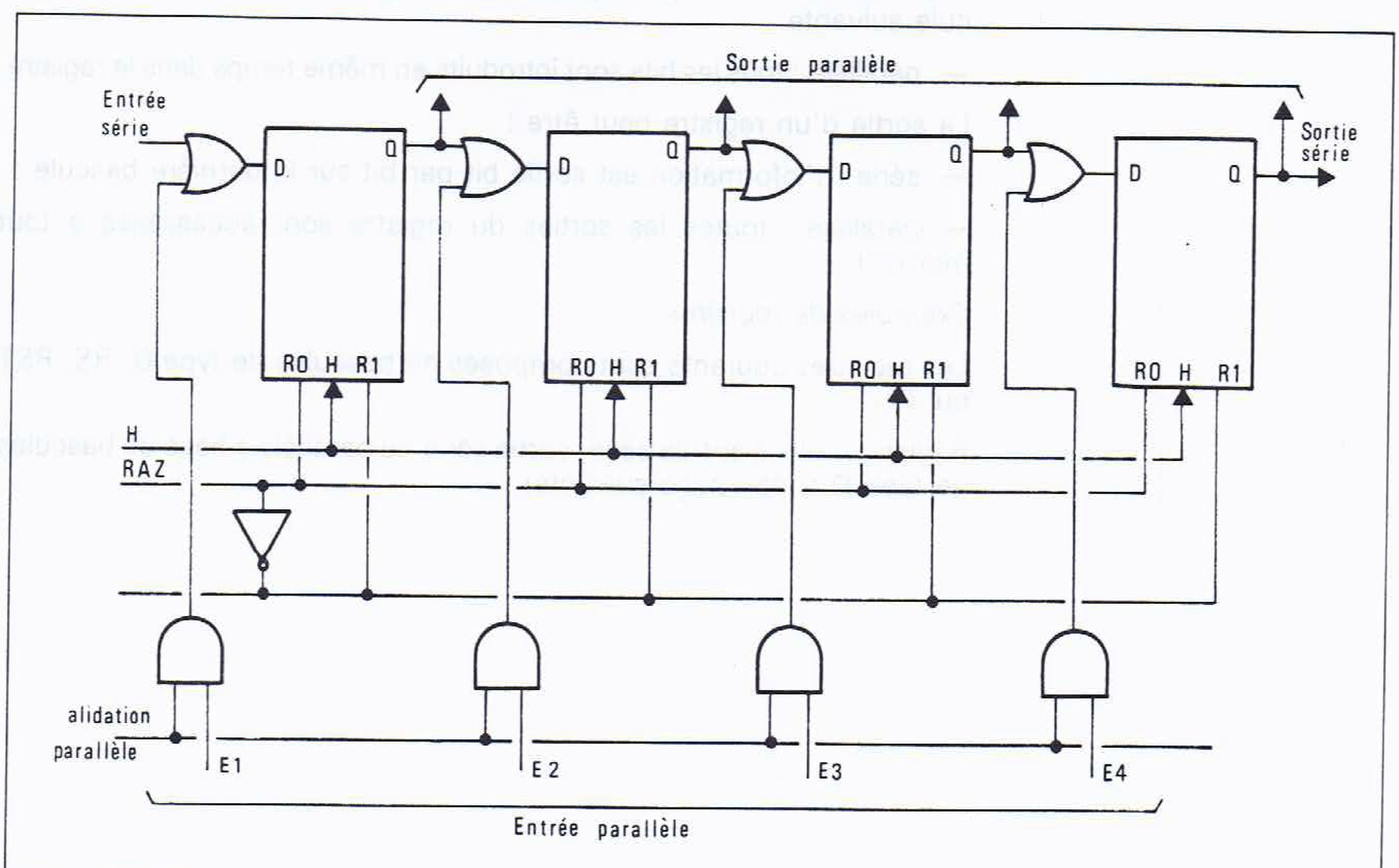
Exemples de registres :

Les registres courants sont composés de bascules de type D, RS, RST ou JK.

Registre 4 bits à entrée série, sortie série ou parallèle à base de bascules de type D : (voir page suivante)



Registre 4 bits à entrée série, sortie série ou parallèle à base de bascules de type D :



13/2

Eléments de mathématiques générales

Ce chapitre, sans avoir la prétention de concurrencer les manuels scolaires, apporte au lecteur les connaissances de base nécessaires pour aborder l'informatique sans difficulté.

La science de base est évidemment « la Mathématique », c'est pourquoi elle se doit de figurer ici. Depuis les notions élémentaires en forme de définitions, jusqu'aux concepts les plus abstraits, ce chapitre vous conduira sans difficulté aux plaisirs mathématiques les plus raffinés. Vous retrouverez, tout au long de l'ouvrage, les applications spectaculaires de ces notions quelquefois abstraites.

13/2.1

Langage des ensembles

I. Vocabulaire de la logique

Le langage mathématique utilise simultanément le langage courant et des signes mathématiques. Il comprend des termes qui dans un assemblage cohérent forme un énoncé.

En mathématique, on utilise des énoncés que l'on ne démontre pas et appelés AXIOMES.

A partir de ces axiomes, on démontre après raisonnement, d'autres énoncés appelés THEOREMES.

Signes usuels de logique

• Le signe de négation

A tout énoncé P, on peut associer un nouvel énoncé appelé négation de P, noté non P, ou $\urcorner$P

Si l'énoncé P est vrai alors non P est faux.

Si l'énoncé P est faux alors non P est vrai.

• Le signe de disjonction noté V

Si P et Q sont 2 énoncés, l'assemblage (PVQ) est un énoncé. L'énoncé (PVQ) est vrai si P est vrai ou Q est vrai, ou les deux.

• Le signe de conjonction noté Λ

Si P et Q sont 2 énoncés, l'assemblage (PΛQ) est un énoncé. L'énoncé (PΛQ) est vrai si P est vrai et Q est vrai.

Tableau récapitulatif (table de vérité)
(V : vrai et F : faux)

P	Q	PVQ	PΛQ
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

- Le signe d'implication $\Longrightarrow$

Si (P implique Q) est vrai et que P est vrai alors Q est nécessairement vrai.

- Le signe d'équivalence $\Longleftrightarrow$

(P $\Longleftrightarrow$ Q) se lit « la proposition P est équivalente à la proposition Q »

Exemple :

Le nombre entier n est divisible par 2 $\Longleftrightarrow$ n est pair.

Ensembles et éléments

La notion d'ensemble est évoquée dans le langage courant par des termes : collection, groupement, etc.

Soit E un ensemble et a un objet.

Si l'énoncé « a est élément de E » est vrai on écrit $a \in E$
Si " " est faux on écrit $a \notin E$

Soit E un ensemble dont les éléments sont 1, 2, 3, 4.
On notera E = { 1,2,3,4 }

Deux ensembles sont égaux si ils ont les mêmes éléments.

Un ensemble ne contenant pas d'élément se nomme ensemble vide et se note ϕ ou { }

Les quantificateurs

- Le quantificateur d'existence $\exists$

($\exists a \in E$) P se lit : il existe au moins un élément a tel que la proposition P soit vérifiée.

- Le quantificateur universel $\forall$

($\forall a \in E$) se lit Quel que soit l'élément a de E, la proposition P est vérifiée.

II. Ensemble et parties d'un ensemble

Sous-ensembles ou parties

« $A \subset E$ » $\Longleftrightarrow$ ($\forall a \in A$) $a \in E$ se lit :

« A est un sous-ensemble de E si et seulement si quel que soit l'élément x de A, cet élément x appartient aussi à E. »

$$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Longleftrightarrow A = B$$

Ensemble des parties d'un ensemble P(E)

Soit E = { a,b,c }

On note P(E) = { ϕ, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, E}

Complémentaire d'une partie d'un ensemble E

On note $C(E)A = \{ a \mid a \in E \text{ et } a \notin A \}$

Intersection ($\cap$)

Soit E et $A \subset E$ et $B \subset E$

on écrit $A \cap B = \{ a \in E \ / \ a \in A \text{ et } a \in B \}$

Union ($\cup$)

Soit E et $A \subset E$ et $B \subset E$

on écrit $A \cup B = \{ a \in E \ / \ a \in A \text{ ou } a \in B \}$

Propriétés

Soit E un ensemble et P(E) les parties de E

Soit $A \subset E$ et $B \subset E$

— l'intersection et la réunion sont 2 lois de composition interne dans E, c.a.d. :

$A \in P(E)$ et $B \in P(E)$ $A \cap B \in P(E)$
$A \cup B \in P(E)$

— $\cap$ et $\cup$ sont commutatives et associatives.

commutativité

$A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

associativité

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

— E est l'élément neutre pour $\cap$
$A \cap E = A$

ϕ est l'élément neutre pour $\cup$
$A \cup \phi = A$

— $\cap$ est distributive par rapport à
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

III. Produit cartésien. Relation. Fonction

Produit cartésien

Soit A et B deux ensembles, on appelle produit cartésien de A par B l'ensemble de tous les couples {x,y} où $x \in A$ et $y \in B$, et on note $A \times B = \{ (x,y) \ / \ x \in A \text{ et } y \in B \}$

Relation

La donnée de 2 ensembles A et B et d'une partie de A x B définit une relation.

Exemple : A = { 2,4,6,8 }
B = { 1,2,3 }

L'ensemble G de AxB / G = { (2,1), (4,2) (6,3) } définit la relation « x est le double de y » x ∈ A et y ∈ B, on écrit x $\mathscr{R}$ y.

Propriétés de la relation

- Réflexivité

Une relation $\mathscr{R}$ dans E est réflexive si x $\mathscr{R}$ x.

Exemple :la relation « x est le fils de y » n'est pas réflexive car x ne peut pas être le fils de lui-même.

- Symétrie

Une relation est dite symétrique si et seulement si pour tout couple (x,y) de A X B

x $\mathscr{R}$ y => y $\mathscr{R}$ x

Exemple : dans l'ensemble des droites si D1//D2 alors D2//D1

La relation « est parallèle à » est symétrique.

- Antisymétrie

Une relation $\mathscr{R}$ est antisymétrique si x est en relation avec y et que y n'est pas en relation avec x
x $\mathscr{R}$ y et que y $\mathscr{R}$ x

- Transitivité

Une relation est transitive si et seulement si V (x,y,z) de E (x $\mathscr{R}$ y) et (y $\mathscr{R}$ z) => x $\mathscr{R}$ z

Exemple : la relation « est plus petit que » est transitive.

Relation d'équivalence

Définition : $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si elle est :

— réflexive

— symétrique

— transitive

Définition : on appelle classe d'équivalence d'un élément a ∈ E, le sous-ensemble de tous les éléments de E équivalents à a.

Définition : on appelle partition d'un ensemble E tout sous-ensemble non vide de E.

Relation d'ordre

Définition : $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si elle est :

— réflexive

— antisymétrique

— transitive

Relation d'ordre total

Une relation d'ordre est totale si
$x \mathscr{R} y$ ou $y \mathscr{R} x$

Relation d'ordre partiel

Une relation est d'ordre partiel si il existe $(x,y) \in E \times E$ / n $\mathscr{R}$ y et y$\mathscr{R}$ x

Fonction

Soit 2 ensembles E et F.

Une relation $\mathscr{R}$ de E vers F est une fonction si tout élément de E est en relation avec au plus un élément de F.

Application

Une relation E est une application de E vers F si et seulement si tout élément de E est en relation avec un élément et UN SEUL de F.
$(\forall x \in E, \exists ! y \in F / x \mathscr{R} y)$

Bijection

Une application dont tout élément de F est l'image d'un seul élément de E est appelée bijection.

Une application bijective $\Longleftrightarrow (\forall y \in F, \exists ! x \in E / y \mathscr{R} x)$

13/2.1.1

Ensembles des nombres

ENSEMBLE DES NOMBRES ENTIERS RELATIFS ($\mathbb{Z}$)

L'ensemble $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers positifs et négatifs. On peut l'écrire ainsi :

$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}$

On remarquera que N l'ensemble des entiers naturels est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$.

Remarque :

Soit $a \in \mathbb{Z}$, $|a|$ se lit valeur absolue de a, si $a > 0$ alors $|a| = a$ et si $a < 0$ alors $|a| = -a$. Prenons $a = -7$, $|-7| = -(-7) = 7$ et si $a = 5$ $|5| = 5$. Nous constatons que la valeur absolue d'un nombre quelconque est toujours positive.

- Définition et propriétés de l'addition dans $\mathbb{Z}$

La somme de 2 entiers relatifs de même signe est le relatif qui a pour valeur absolue la somme des valeurs absolues et pour signe le signe commun. La somme de 2 entiers relatifs de signes contraires est le relatif qui a pour valeur absolue la différence des 2 valeurs absolues et pour signe le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue.

Exemple : $(+14) + (+5) = (+19)$; $(+7) + (-11) = (-4)$

Propriétés	Formulation pour a, b, c $\in \mathbb{Z}$
Commutativité	$a + b = b + a$
Associativité	$(a+b) + c = a + (b+c)$
0 est l'elt. neutre	$a + 0 = 0 + a = a$
$-a$ est l'opposé de a	$a + (-a) = (-a) + a = 0$

- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x + b = a$

Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ on cherche si il existe $x \in \mathbb{Z} \,/\, x+b=a$. Pour cela on va se servir des propriétés ci-dessus.

$[(x+b)+(-b)=a+(-b)] \Leftrightarrow [x+(b+(-b))=a+(-b)] \Leftrightarrow [x=a+(-b)]$

x sera donc égal à la différence $a-b$.

- Définition et propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Le produit de 2 relatifs a et b est le relatif dont le signe est positif si a et b sont de même signe, négatif si a et b sont de signes contraires, et dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues de a et b.

Propriétés	Formulation pour a, b, c$\in\mathbb{Z}$
Commutativité	$a * b = b * a$
Associativité	$(a*b) * c = a * (b*c)$
1 est l'élt. neutre	$a * 1 = 1 * a = a$
Multiplication par 0	$a * 0 = 0 * a = 0$

ENSEMBLE DES NOMBRES DECIMAUX (ID)

• Ensemble des puissances de dix

Si p est un entier relatif, différent de zéro, on appelle puissance P[ième] de 10 et on note $10^\wedge p$ le nombre positif tel que :

si $p>0$ $\quad 10^\wedge p = 10*10*10*\ldots = 10000\ldots0$ (p zéros)

si $p<0$ $\quad 10^\wedge p = 1/(10^\wedge p) = 1/10000\ldots0 = 0{,}0000\ldots1$ (p zéros en tenant compte de celui devant la virgule).

Propriétés :

Soient $n\in$ IN et $p\in$ IN et $a\in\mathbb{Z}$ et $b\in\mathbb{Z}$

1) $10^\wedge 0 = 1$

2) $10^\wedge(-n) = 1/10^\wedge n$

3) $10^\wedge(n+p) = (10^\wedge n)*(10^\wedge p)$

4) $(10^\wedge n)^\wedge p) = 10^\wedge(n*p)$

5) $a*10^\wedge n + b*10^\wedge n = (a+b)*10^\wedge n$

6) $10^\wedge n/10^\wedge p = 10^\wedge(n-p)$

• Nombres décimaux. Définition

L'ensemble ID des nombres décimaux est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme : $a*(10^\wedge n)$ avec $a\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{Z}$.

Exemple :

$0{,}015 = 15 * 0{,}001 = 15 * 10^\wedge(-3)$

ENSEMBLE DES NOMBRES REELS (IR)

Soit l'équation $11*x = 28$. Si x appartenait à $\mathbb{Z}$ alors la division de 28 par 11 n'aurait pas de reste. Ce n'est pas le cas $28 = 11*2 + 6$. Il n'existe pas non plus de décimal vérifiant cette équation. 28/11 sera appelé un nombre rationnel et si l'on fait la division de 28 par 11 on va trouver une suite illimitée périodique de chiffres soit 2, 54545454545...

Définition : Les nombres rationnels sont représentés par des développements décimaux illimités périodiques.

Propriétés

Les propriétés dans $\mathbb{R}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{Z}$ avec en plus pour la multiplication la propriété suivante : si $a \in \mathbb{R}$ alors il existe le réel $1/a$ tel que $a*(1/a)=1$ (avec a différent de 0) et aussi la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition : $a*(b+c) = a*b + a*c$. Les propriétés sur les puissances de 10 restent valables dans $\mathbb{R}$ et tout réel a mis à une puissance quelconque suit aussi ces propriétés.

Exemple :

$(3\hat{}2)*(3\hat{}4) = 3\hat{}(2+4) = 3\hat{}6$

Opérations dans $\mathbb{R}$: Racine carrée d'un réel positif. On appelle racine carrée d'un nombre réel positif x, le réel a tel que $a*a = x$ soit $a\hat{}2 = x$ et on note $\sqrt{x} = a$.

Propriétés : $\sqrt{(x*y)} = \sqrt{x}*\sqrt{y}$ et $\sqrt{(x/y)} = \sqrt{x}/\sqrt{y}$.

Nous pouvons conclure en écrivant que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ qui signifie $\mathbb{N}$ inclus dans $\mathbb{Z}$, qui est inclus dans $\mathbb{D}$ qui est inclus dans $\mathbb{R}$.

13/2.1.2

Notions de numération

NUMÉRATION DÉCIMALE

Considérons le nombre entier 3874. Il peut s'écrire sous la forme : $3*10\hat{}3 + 8*10\hat{}2 + 7*10\hat{}1 + 4*10\hat{}0$ ainsi tout nombre pourra se décomposer suivant les puissances de DIX. On appellera BASE 10 l'ensemble des puissances de 10, et tout nombre s'écrira dans cette base en utilisant dix chiffres (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

NUMÉRATION BINAIRE

• Définition

Dans la numération binaire la base est l'ensemble des puissances de 2. ($2\hat{}n, ..., 2\hat{}4, 2\hat{}3, 2\hat{}2, 2\hat{}1, 2\hat{}0$). Tout nombre s'écrira en BASE 2 en utilisant 2 chiffres 0 et 1. Ces 2 chiffres sont appelés BITS (BInary digiTS). Dans les circuits électroniques d'un micro-ordinateur, soit le courant passe et c'est l'état 1 soit le courant ne passe pas et c'est l'état 0. D'où l'utilité de représenter tout nombre en base 2.

Exemple : soit le nombre entier 15 :

$$15 = 1*8 + 1*4 + 1*2 + 1*1$$
$$= 1*2\hat{}3 + 1*2\hat{}2 + 1*2\hat{}1 + 1*2\hat{}0$$

En binaire 15 s'écrira 1111.

Tableau de correspondance décimal-binaire

binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010
décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Exercice d'application : Ecriture dans le système binaire d'un nombre écrit en décimal.

Pour écrire un nombre décimal en binaire, on effectue des divisions successives par 2 jusqu'au moment où l'on obtient un quotient nul. Les restes des divisions représentent l'écriture binaire du nombre.

Exemple : $13 = 2*6 + 1$; $6 = 2*3 + 0$; $3 = 2*1 + 1$; $1 = 2*0 + 1$ les restes des divisions représentent 13 en binaire soit 1101.

- Opérations en base binaire

— Addition

Soit à additionner dans le système binaire les nombres 13 et 5 qui s'écrivent respectivement 1101 et 101. Il faut savoir tout d'abord que (0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 10). On remarquera que l'addition correspond à la fonction logique OU (U). Donc lorsque nous aurons 1 + 1 nous poserons 0 et nous retiendrons 1.

Reprenons l'exemple :

```
   1 1   (retenues)
  1101
+  101
 -----
 10010   On vérifiera que 10010 = 18
```

— Multiplication

Il faut savoir tout d'abord que 0 * 0 = 0, 0 * 1 = 0, 1 * 0 = 0 et que 1 * 1 = 1. On remarquera que la multiplication correspond à la fonction logique ET.

Reprenons l'exemple : soit 13 * 5 = 65 en décimal.

En binaire nous auront :

```
   1101
*   101
-------
   1101
   000
 1101..
-------
1000001   ce qui est bien l'écriture de 65 en binaire.
```

SYSTÈME DE BASE 16 OU HEXADÉCIMAL

- Définitions

La base 16 sera donc l'ensemble des puissances de 16, et tout nombre s'écrira en utilisant seize symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. La correspondance avec le système décimal sera : A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 et F = 15. Soit le nombre E5A en hexadécimal. Déterminons son écriture dans le système décimal.

```
E5A = 14*(16^2) + 5*(16^1) + 10*(16^0)
    = 3584      + 80       + 10
    = 3674
```

- Exercice d'application

Ecriture dans le système décimal d'un nombre écrit en base 16. On procède de la même manière qu'avec un nombre binaire mais cette fois-ci en effectuant des divisions successives par 16. Les restes des divisions constituant l'écriture hexadécimale du nombre. Soit l'exemple : 4325.

4325 = 270 * 16 + 5 ; 270 = 16 * 16 + 14 ; 16 = 1 * 16 + 0 ; 1 = 16 * 0 + 1 donc l'écriture hexadécimale de 4325 sera 10E5.

Remarque :

Dans un ordinateur les calculs sont traités en système binaire. Les bits sont groupés par OCTETS (groupe de 8). Il est utile de représenter un octet en héxadécimal car le format est alors de deux chiffres variant de 00 à FF..

Tableau de correspondance héxadécimal-binaire

binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001
HEXA	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

binaire	1010	1011	1100	1101	1110	1111
HEXA	A	B	C	D	E	F

Exemple : Soit l'octet 1100 0111 en héxadécimal il s'écrira C7.

AUTRES BASES

Il existe autant de bases que de nombres entiers (base 3, base 4, ... etc.) et tout nombre s'écrit d'une manière et une seule dans chaque base. Pour écrire un nombre décimal dans une de ces bases, on procède de la même manière qu'en binaire ou en héxadécimal.

Le programme dont la liste vous est présentée ci-après effectue pour vous le passage d'une base quelconque à une autre base.

Vous n'aurez, avec celui-ci plus aucune difficulté à transformer un nombre en base 3 en son équivalent en base 7 par exemple.

```
5 REM copyright WEKA 1989
10 MODE 2
20 INK 0,0:INK 1,13
30 PAPER 0
40 BORDER 1
50 DIM chif(20):DIM ires(20):DIM ires$(20)
60 PRINT "PROGRAMME de CHANGEMENT DE BASE"
70 INPUT "entrez le num{ro de la base de d{part : ";nd
80 INPUT "entrez le num{ro de la base d'arriv{e : ";na
90 IF (na>16) OR(nd>16) GOTO 450
100 INPUT "entrez le nombre ecrit dans la base de d{part : ";no$
110 n=LEN(no$)
120 FOR i=1 TO n
130 chif$ = MID$(no$,i,1)
140 ascii = ASC(chif$)
150 IF ascii>64 AND ascii<71 THEN chif$=STR$(ascii-64+9)
160 chif(i) = VAL(chif$)
170 IF (chif(i) > nd OR chif(i)=nd) GOTO 450
```

```
180 NEXT i
190 REM Ecriture du nombre en base 10
200 a =0
210 FOR i=1 TO n
220 a = a + chif(i)*nd^(n-i)
230 NEXT i
240 REM Ecriture du nombre dans la base d'arriv{e
245 REM Methode des divisions succ{ssives
250 i=0
260 b = a
270 i=i+1
280 quo = b/na
290 iquo = INT(quo)
300 ires(i) = b - iquo*na
310 k=i
320 b = iquo
330 IF iquo = 0 GOTO 350
340 GOTO 270
350 a$=""
360 FOR i = 1 TO k
370 ires$(i)=STR$(ires(k-i+1))
380 t=ires(k-i+1)
390 IF t > 9 THEN  ires$(i) = CHR$(t-9+64)
400 a$ = a$ + ires$(i)
410 NEXT i
420 PRINT"Le nombre en base";nd;":";no$
430 PRINT"s'{crira en base ";na;":";a$
440 END
450 PRINT "erreur d'entr{e"
460 END
```

13/2.2

Notions générales de géométrie

Tout d'abord, nous distinguerons deux sortes de géométries. La première nous décrira les formes géométriques, les notions d'angles, etc. La deuxième est celle où l'on placera les figures dans un repère donné.

I. Géométrie élémentaire

QUELQUES DÉFINITIONS

- Le point

Prenez un cube, on peut considérer que les sommets du cube sont des points. C'est là l'idée physique du point. La représentation du point sera la trace du crayon sur une feuille. On le notera avec une lettre majuscule A ou B ou C.

- Le plan

Nous pouvons nous représenter un plan en prenant par exemple une surface de tableau, une planche à dessin, etc.

Nous noterons le plan P.

- La droite

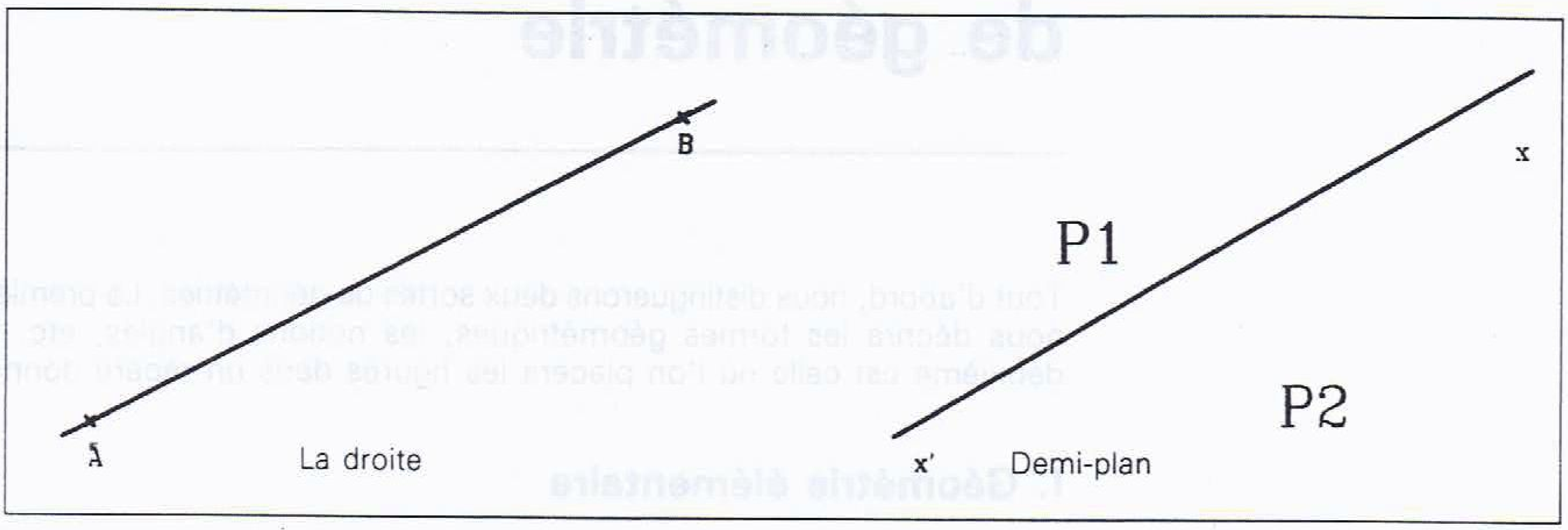
Si nous prenons un plan et 2 points A et B de ce plan, la ligne la plus courte pour rejoindre A à B sera appelée segment de droite.

En la prolongeant de part et d'autre de A et B nous obtenons une droite.

Par 2 points passe une seule droite.

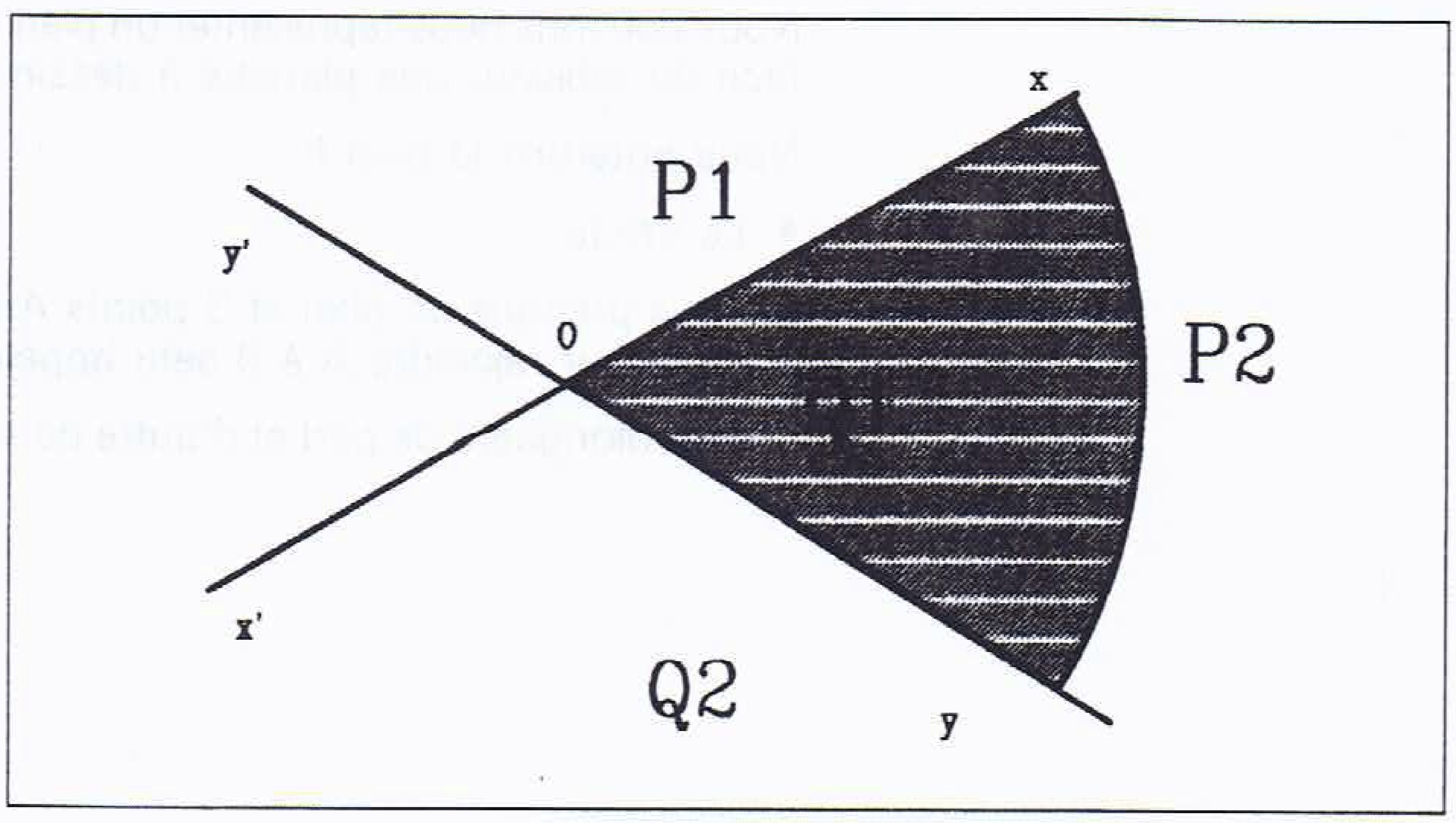
- Demi-plan

Toute droite du plan détermine 2 parties de ce plan appelées demi-plans associés à cette droite.



- Secteur angulaire

Reprenons la droite x'x et les plans P1 et P2, prenons un point O de cette droite et faisons passer une autre droite y'y qui définit donc 2 autres demi-plans Q1 et Q2.



La partie hachurée est l'intersection de P2 avec Q1 (P2 Q1).

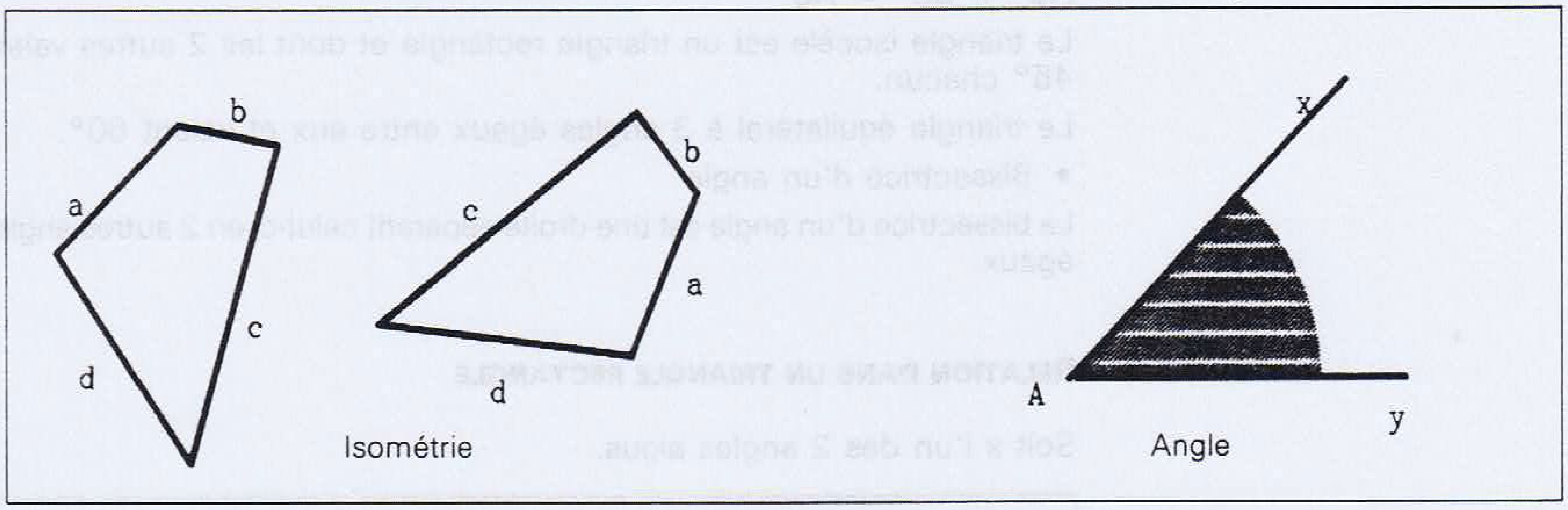
Nous l'appellerons secteur angulaire.

- Isométrie

Deux figures sont dites isométriques si elles sont superposables. Cette superposition s'obtenant soit par glissement, soit par retournement du plan.

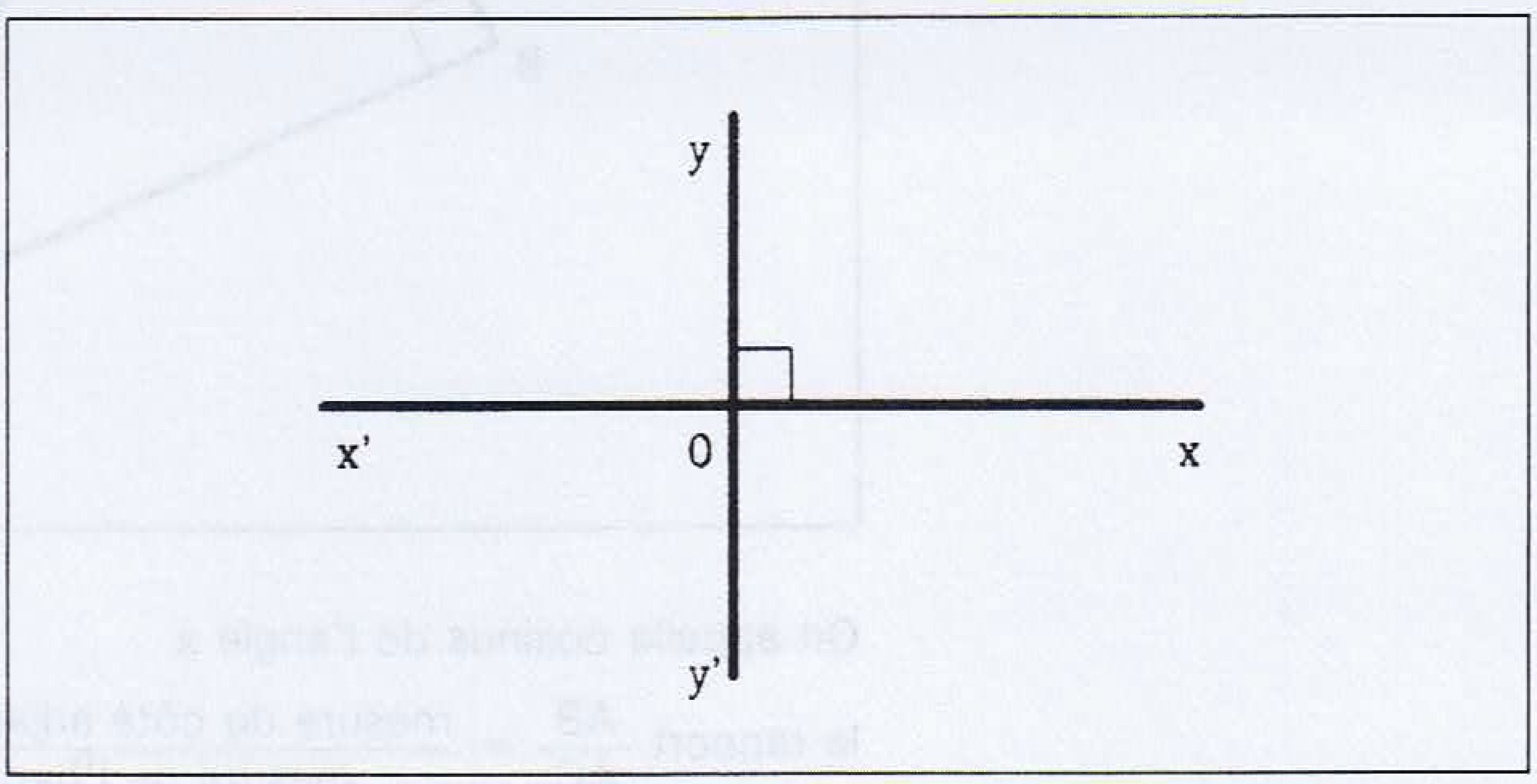
- Angle

Soit un secteur angulaire [Ax,Ay], l'angle noté $\widehat{xAy}$ est l'ensemble des secteurs angulaires isométriques au secteur angulaire [Ax,Ay].



- Angle droit

Prenons une droite x'x et une autre droite y'y de telle manière que les 4 secteurs angulaires soient isométriques entre eux. L'angle xOy définit sera appelé ANGLE DROIT et l'angle x'Ox angle plat.



- Unité d'angle

On utilise 3 unités d'angle : le degré, le grade et le radian, ce dernier sera défini un peu loin.

Il faudra retenir qu'un angle plat vaut 180° (degrés) ou 200 gd (grades) et qu'un angle droit vaut 90° ou 100 gd. 2 droites sont dites perpendiculaires si leur angle est 90°.

- Triangle

La somme des trois angles vaut 180°.

Le triangle rectangle a un angle droit.

Théorème de pythagore : la somme des carrés des côtés est égal au carré de l'hypothénuse

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

Le triangle isocèle est un triangle rectangle et dont les 2 autres valent 45° chacun.

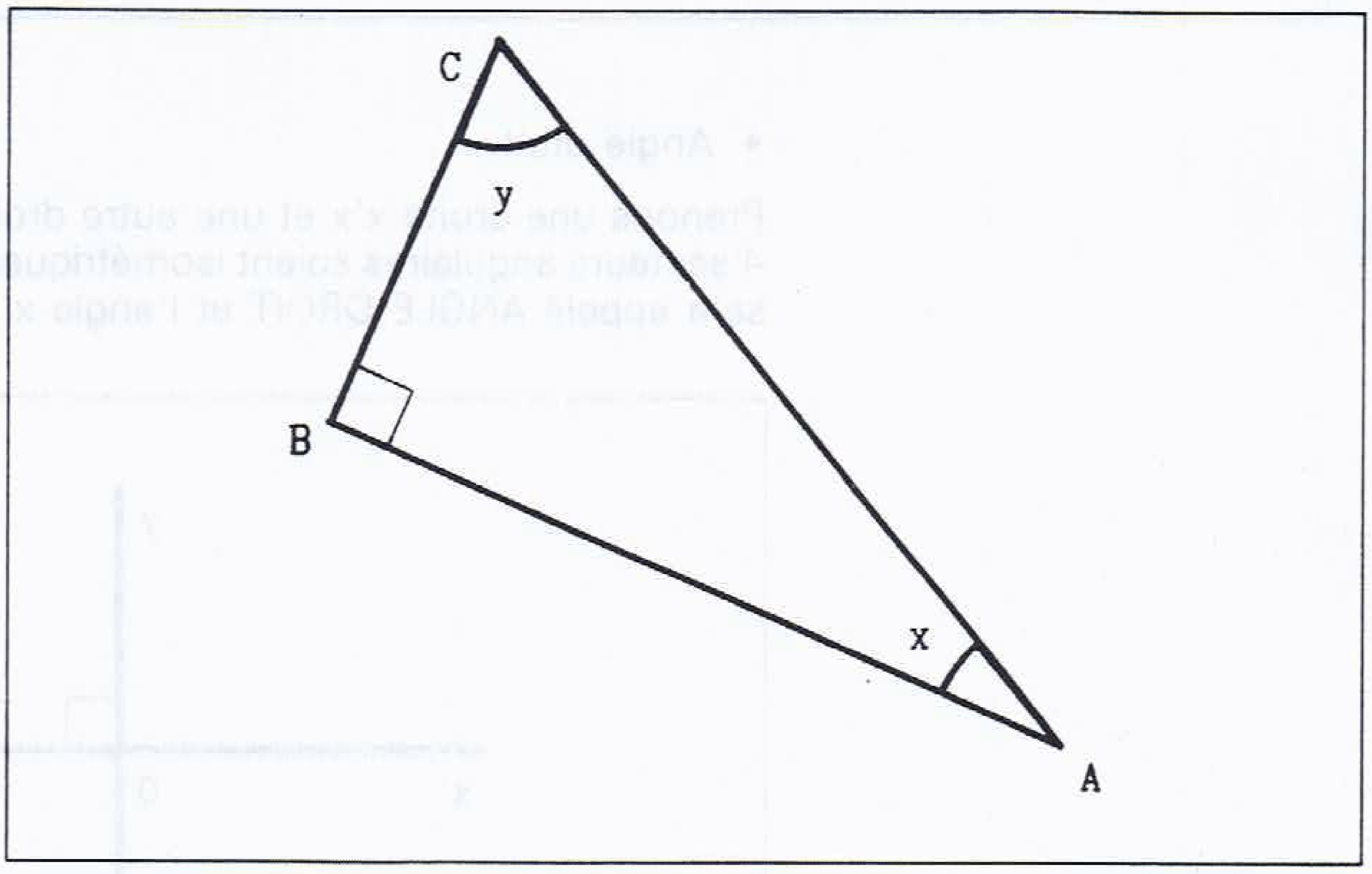
Le triangle équilatéral à 3 angles égaux entre eux et valant 60°.

- Bissectrice d'un angle

La bissectrice d'un angle est une droite séparant celui-ci en 2 autres angles égaux.

RELATION DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

Soit x l'un des 2 angles aigus.



On appelle cosinus de l'angle x

le rapport $\frac{AB}{AC} = \frac{\text{mesure du côté adjacent à l'angle}}{\text{mesure de l'hypothénuse}} = \cos(x)$

On appelle sinus de l'angle x

le rapport $\frac{BC}{AC} = \frac{\text{mesure du côté opposé à l'angle}}{\text{mesure de l'hypothénuse}} = \sin(x)$

On remarquera que le cosinus et le sinus sont toujours inférieurs à 1

On appelle tangente de l'angle x

le rapport $\frac{BC}{AB} = \frac{\text{mesure du côté opposé à l'angle}}{\text{mesure du côté adjacent à l'angle}} = tg(x)$

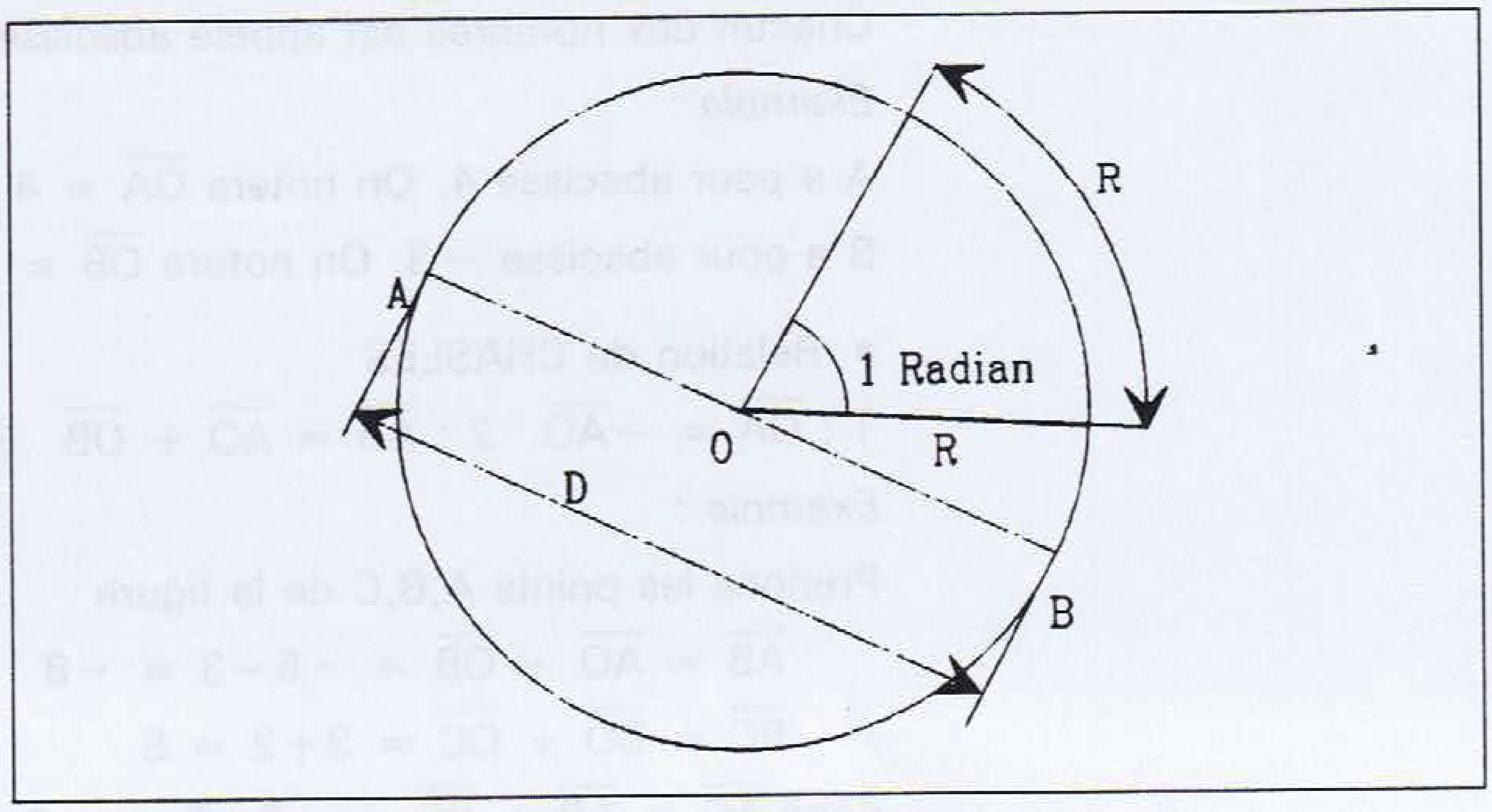
On remarque que tg(x) = sin(x) / cos(x)

On appelle cotangente de l'angle x le rapport AB/BC

On remarque que cotg(x) = 1/tg(x) = cos(x)/sin(x)

LE CERCLE

Le cercle est une ligne plate courbe fermée. Tous ses points sont à une même distance d'un point fixe appelé centre. Cette distance est appelée RAYON R du cercle. Une droite passant par 0 coupe le cercle en 2 points diamétralement opposés. La mesure de la longueur AB est appelée diamètre (D = 2R)



Le Radian est une unité de mesure d'angle équivalent à l'angle qui ayant un sommet en 0, intercepte sur la circonférence un arc de longueur égale au rayon.

La circonférence du cercle est égale à $2*\pi*R$

Le nombre PI (π) est un nombre irrationnel valant environ 3,141592654...
L'explication de la mesure de PI ne fera pas l'objet de ce chapitre.

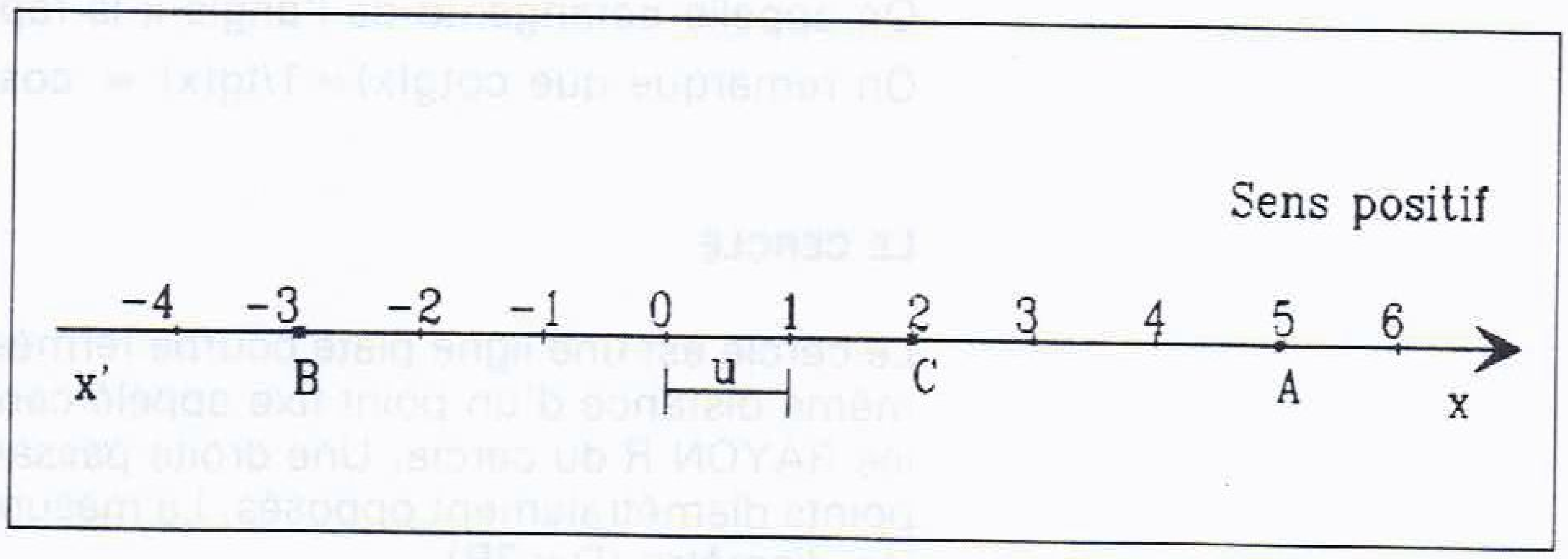
Equivalence degré, grade, radian

degré(°)	0	45	90	180	270	360
grade(gd)	0	50	100	200	300	400
radian(rd)	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π

II. Géométrie affine et vectorielle

- Repère des points d'une droite

Soit une droite D et un point origine O. Nous allons pouvoir la graduer arbitrairement de manière à repérer n'importe quel point A par rapport à O. Nous reporterons consécutivement un segment de droite u de longueur unité et en les numérotant.



Chacun des nombres est appelé abscisse du point correspondant

Exemple :

A a pour abscisse 4. On notera $\overline{OA} = 4$

B a pour abscisse -3. On notera $\overline{OB} = -3$

- Relation de CHASLES

1 : $\overline{OA} = -\overline{AO}$ 2 : $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB}$ 3 : $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

Exemple :

Prenons les points A,B,C de la figure

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -5-3 = -8$$

$$\overline{BC} = \overline{BO} + \overline{OC} = 3+2 = 5$$

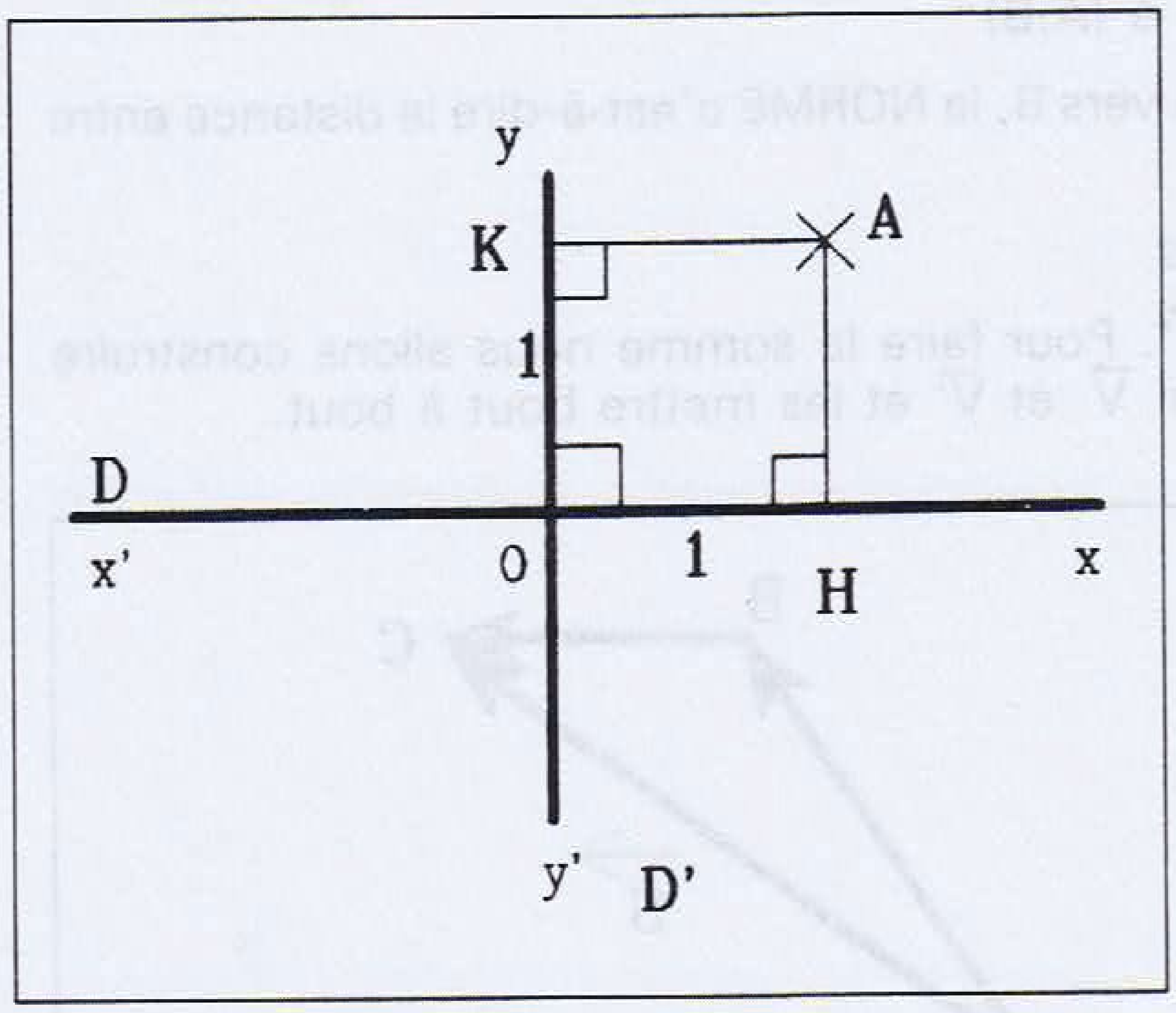
donc $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = -8+5 = -3$

- Distance

Alors que la mesure algébrique de 2 points peut avoir le signe (−) ou (+) suivant le sens positif que l'on s'est donné, la distance, elle, représente la mesure de la longueur AB. Elle est toujours POSITIVE.

- Repère cartésien du plan

Soit un plan P, construisons dans ce plan 2 droites D et D' orthogonales entre elles, de même origine O et graduons-les. On obtient un repère du plan et tous les points de ce plan vont pouvoir être repérés.



OH est la projection orthogonale de A sur D parallèlement à D'

$\overline{OK}$ est la projection orthogonale de A sur D' parallèlement à D.

$\overline{OH}$ représente l'abscisse du point A

$\overline{OK}$ représente l'ordonnée du point A

Le couple $(\overline{OH},\overline{OK})$ est appelé coordonnées du point A.

Note :

Si l'unité choisie est la même sur les 2 droites, le repère est dit ORTHONORMÉ

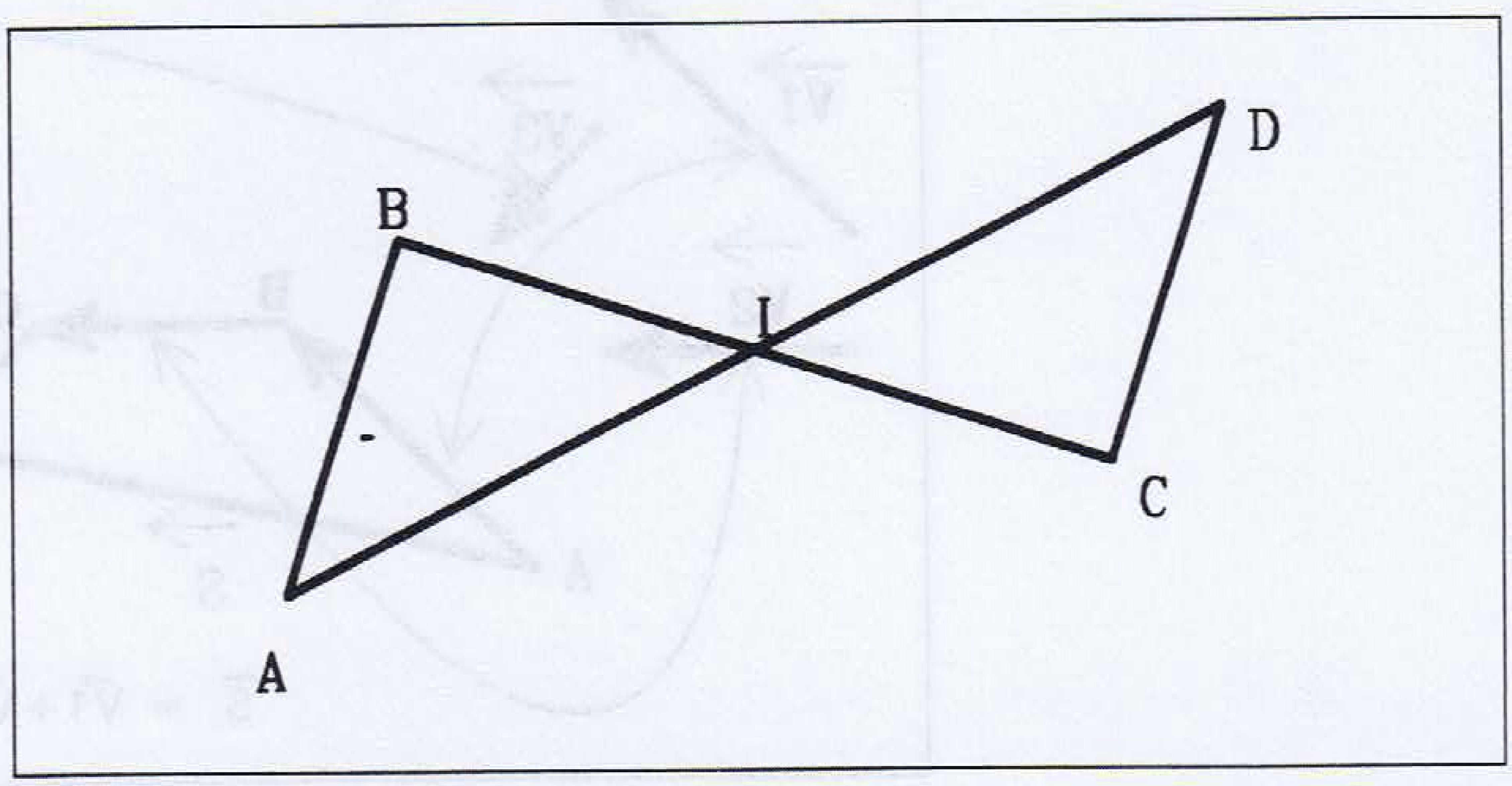
NOTIONS SUR LES VECTEURS

- Bipoints

On appelle bipoint du plan tout couple de points, on note (A,B). A est appelé origine et B extrémité. Ils délimitent un segment de droite [A,B].

- Bipoints équipollents

Le bipoint (A,B) est équipollent au bipoint (C,D) si et seulement si les segments [A,D] et [B,C] ont même milieu I.



ABCD détermine alors un parallélogramme.

On note (A,B) ~ (C,D), signifie (A,B) équipollent à (C,D)

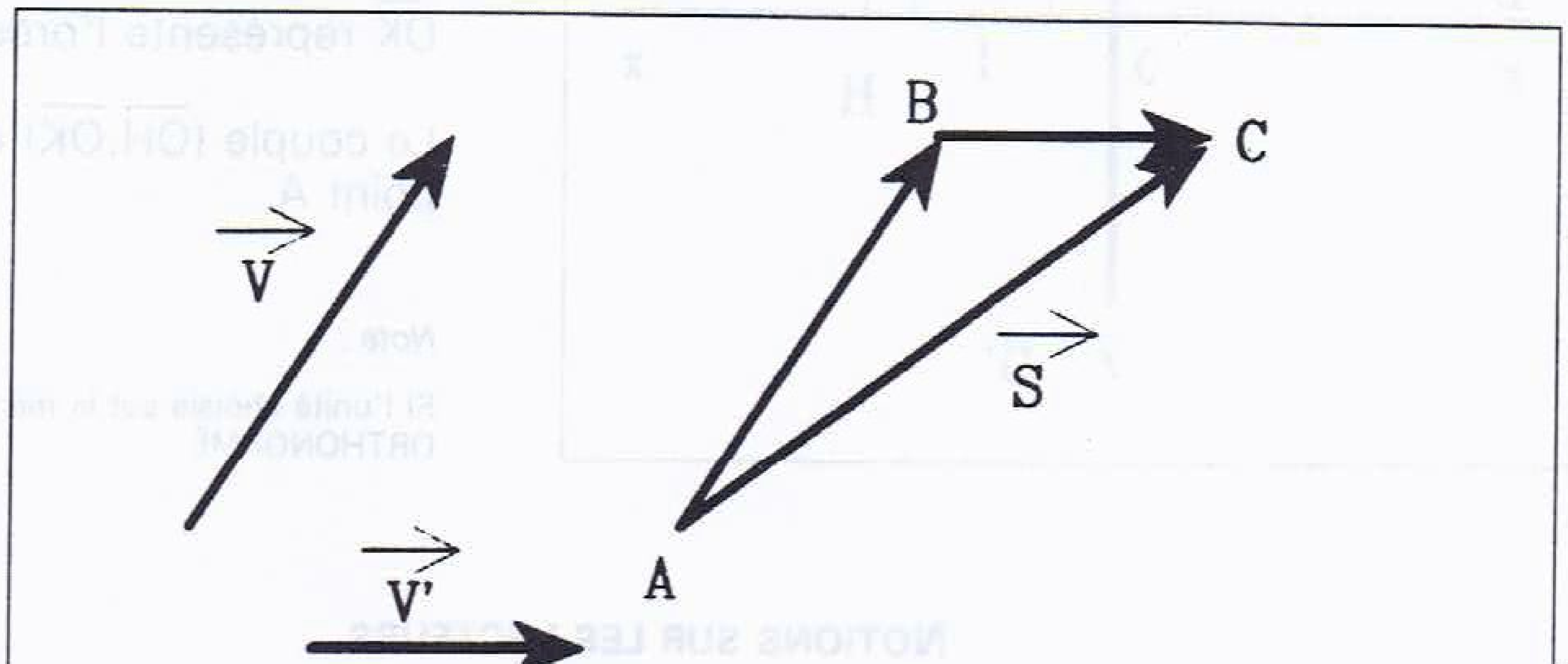
- Vecteurs

Soit un bipoint (A,B). On appelle vecteur noté $\vec{V}$, l'ensemble de tous les bipoints équipollents à (A,B)

On distingue le sens de A vers B, la NORME c'est-à-dire la distance entre A et B et sa direction.

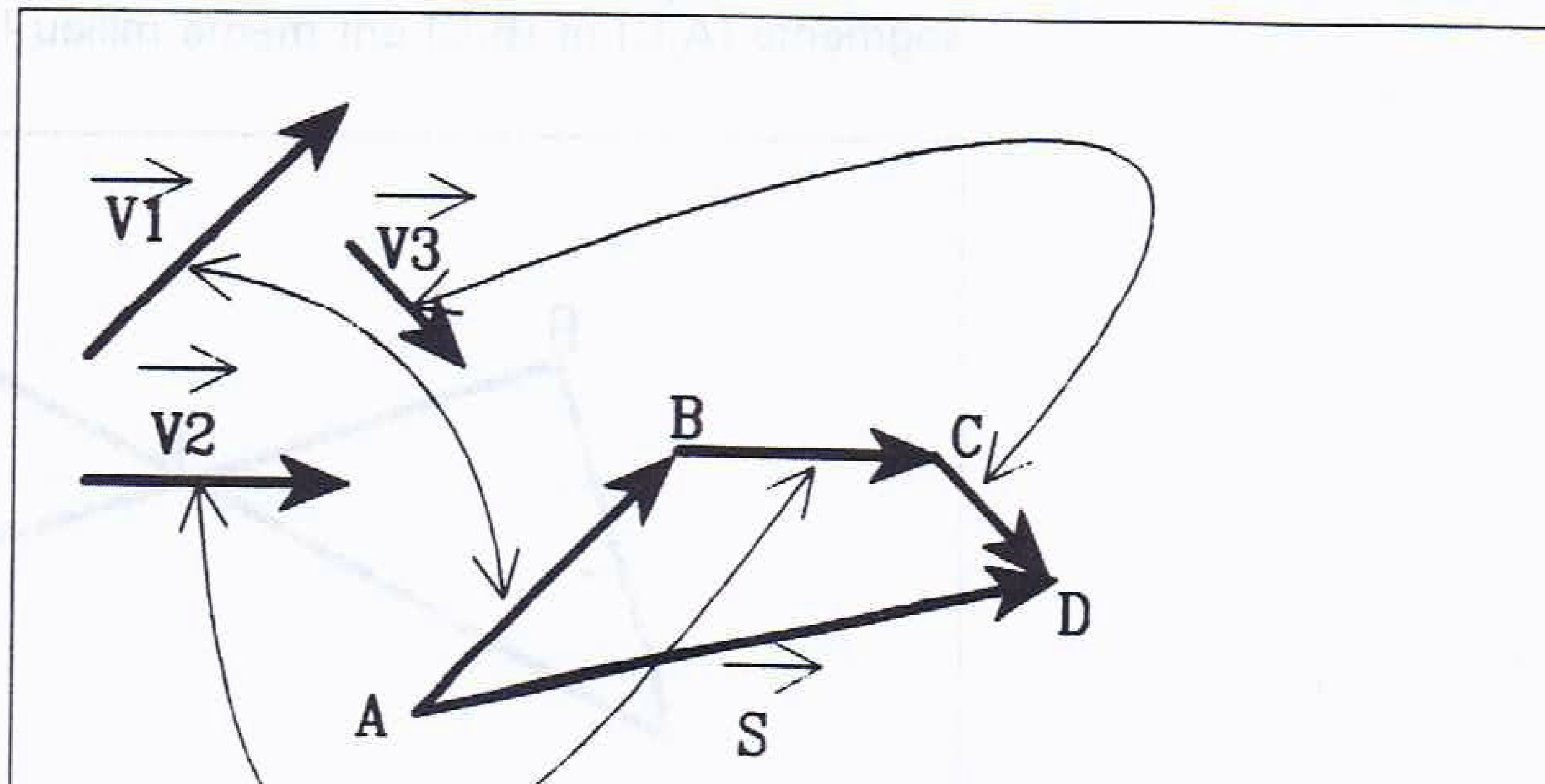
- Somme de 2 vecteurs

Soit 2 vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V'}$. Pour faire la somme nous allons construire 2 bipoints équipollents à $\vec{V}$ et $\vec{V'}$ et les mettre bout à bout.



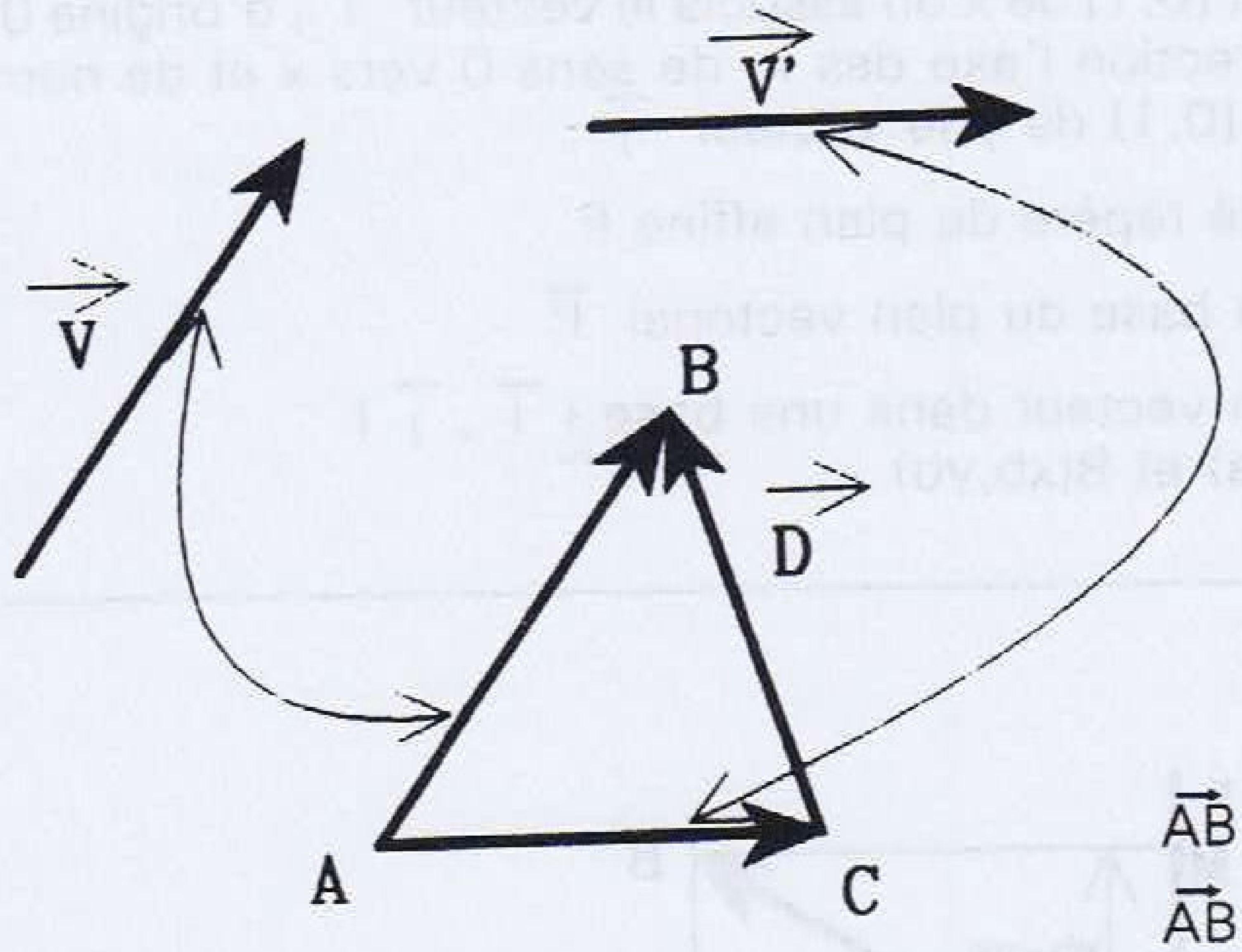
$$\vec{S} = \vec{V} + \vec{V'} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

- Somme de plusieurs vecteurs



$$\vec{S} = \vec{V1} + \vec{V2} + \vec{V3} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$$

- Différence de 2 vecteurs



$\vec{AB} \sim \vec{V}$ et $\vec{AC} \sim \vec{V'}$

$\vec{AB} - \vec{AC} = -\vec{BA} - \vec{AC} = -(\vec{BA} + \vec{AC}) = -\vec{BC} = \vec{CB}$

- Multiplication d'un vecteur par un nombre réel a

Soit un vecteur $\vec{V}$ et un nombre réel a

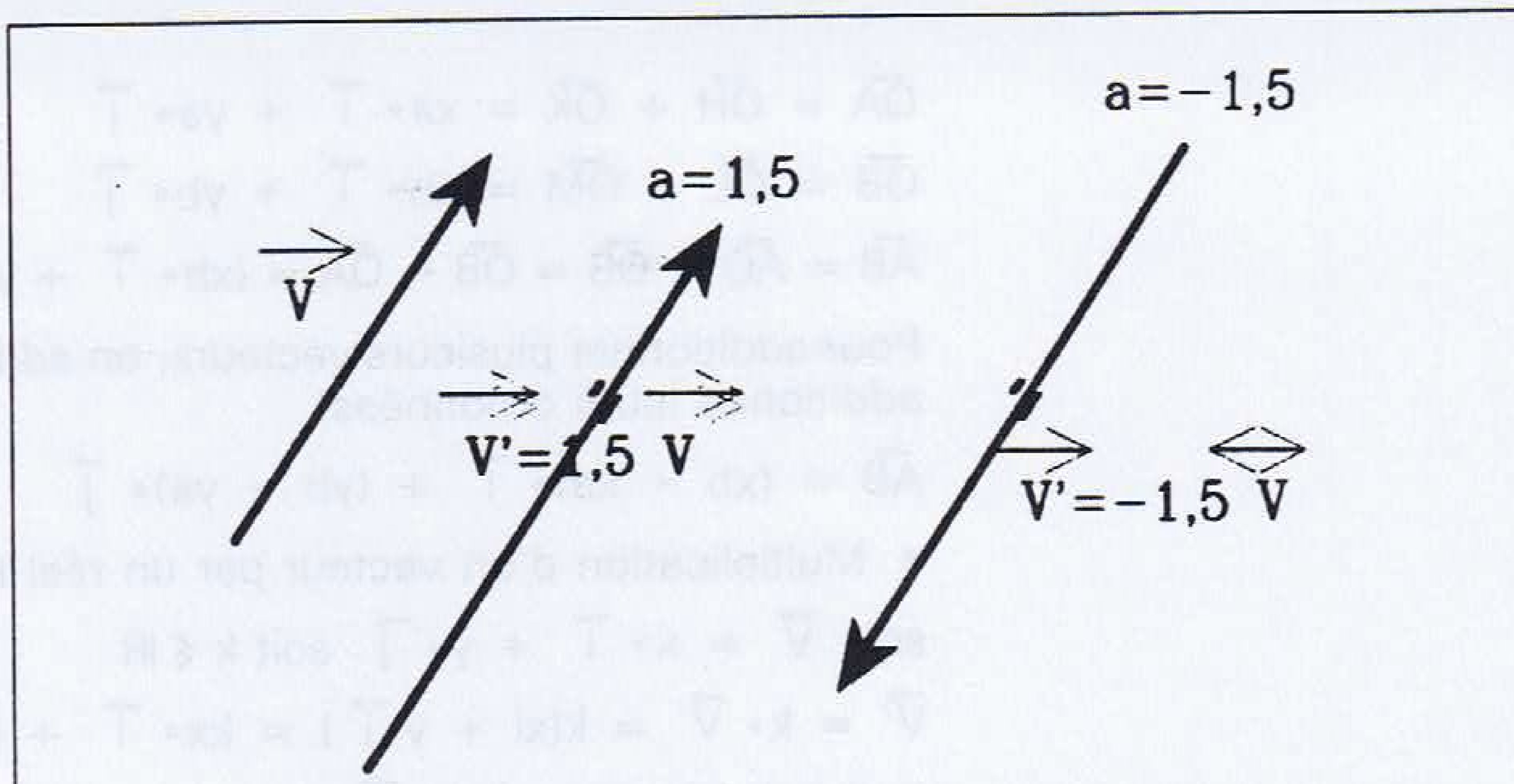
Le vecteur V' = a∗ $\vec{V}$ aura :

— la même direction que $\vec{V}$

— le même sens que $\vec{V}$ si a > 0

— le sens inverse si a < 0

— la norme = a∗ $\|\vec{V}\|$



2 vecteurs sont dits colinéaires s'ils ont la même direction (s'ils sont portés par 2 droites parallèles ou confondues).

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE

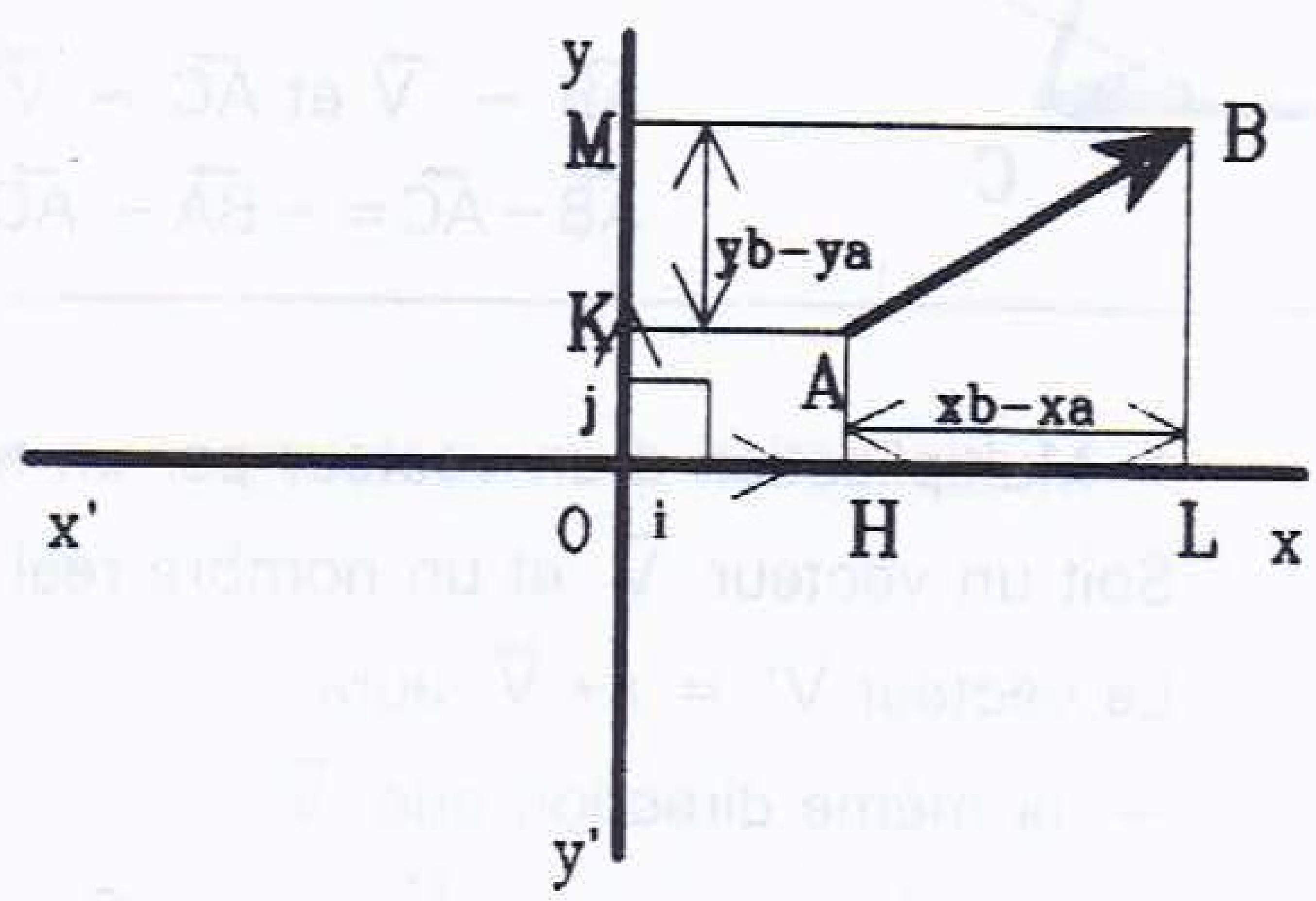
Soit un plan affine P. A ce plan nous pouvons associer un plan vectoriel $\vec{P}$ tel qu'au segment [0,1] de x on associe le vecteur $\vec{i}$, d'origine 0 et d'extrémité 1, de direction l'axe des x, de sens 0 vers x et de norme = 1 et au segment [0,1] de y le vecteur $\vec{j}$.

$(0, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère du plan affine P

$(\vec{i}, \vec{j})$ est appelée base du plan vectorial $\vec{P}$

- Coordonnées d'un vecteur dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$

Soit 2 points A(xa,ya) et B(xb,yb)



$\vec{OH} = xa * \vec{i}$

$\vec{OL} = xb * \vec{i}$

$\vec{OK} = ya * \vec{j}$

$\vec{OM} = yb * \vec{j}$

$\vec{OA} = \vec{OH} + \vec{OK} = xa * \vec{i} + ya * \vec{j}$

$\vec{OB} = \vec{OL} + \vec{OM} = xb * \vec{i} + yb * \vec{j}$

$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (xb * \vec{i} + yb * \vec{j}) - (xa * \vec{i} + ya * \vec{j})$

Pour additionner plusieurs vecteurs, on additionne leurs abscisses et on additionne leurs ordonnées.

$\vec{AB} = (xb - xa) * \vec{i} + (yb - ya) * \vec{j}$

- Multiplication d'un vecteur par un réel K

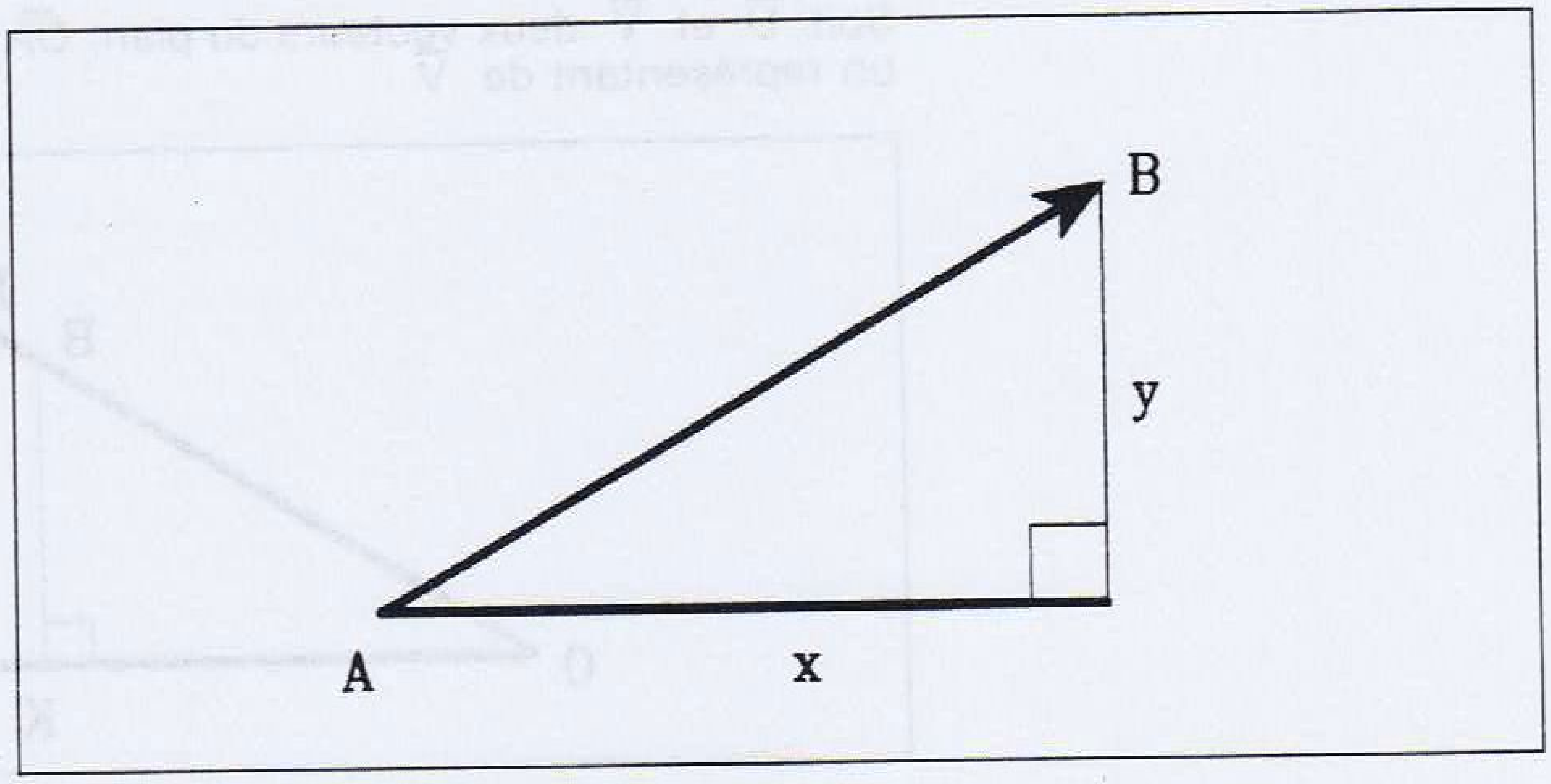
soit $\vec{V} = x * \vec{i} + y * \vec{j}$ soit $k \in \mathbb{R}$

$\vec{V'} = k * \vec{V} = k(xi + y\vec{j}) = kx * \vec{i} + ky * j$

- Norme d'un vecteur $\vec{AB}(x,y)$

La norme d'un vecteur $\vec{AB}$ est la mesure de la longueur du segment [A,B]. Ce segment représente l'hypothénuse d'un triangle rectangle. Donc la norme sera égale à la racine des carrés des coordonnées.

On note $\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x^2 + y^2)}$



• Equation d'une droite

Soit A un point du plan P de coordonnées (xa,ya).

Soit le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées (a,b)

La droite définie par le point A et le vecteur $\vec{V}$ est l'ensemble des points M(x,y) tels que $\vec{AM}$ et $\vec{V}$ soient colinéaires.

$\vec{AM}$ est colinéaire à $\vec{V} \Longleftrightarrow k \in \mathbb{R},\ \vec{AM} = k.\vec{V}$

$\vec{AM} = (x - xa, y - ya)$ et $\vec{V} = (a,b)$

on écrit : $x - xa = k.a$ ces équations sont appelées
$y - ya = k.b$ équations paramétriques

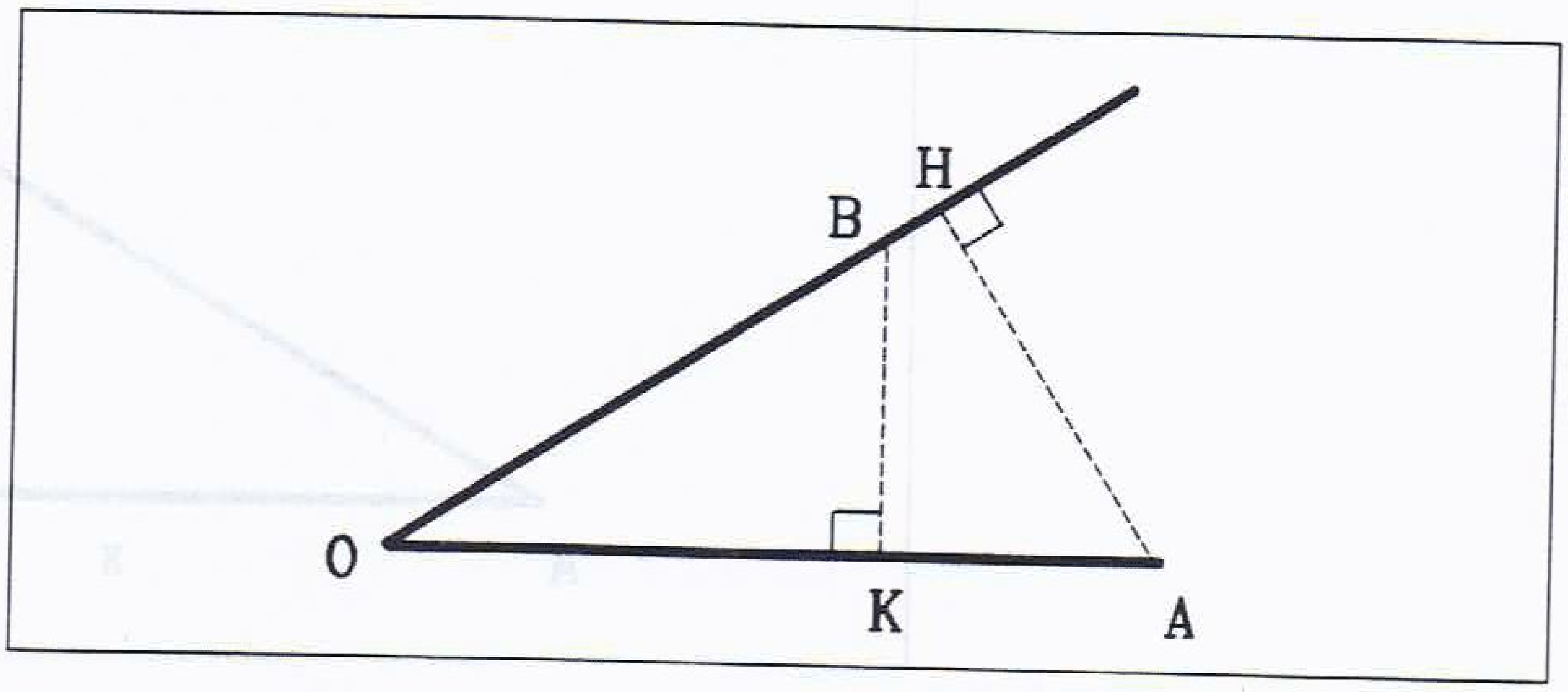
De ces 2 équations on peut sortir k et écrire :

$k = (x - xa)/a = (y - ya)/b \Longleftrightarrow (x - xa).b = (y - ya).a$

On obtient $\boxed{(x - xa).a - (y - ya).b = 0}$ qui est appelée équation cartésienne

- Produit scalaire de 2 vecteurs

Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs du plan, $\vec{OA}$ un représentant de $\vec{U}$ et $\vec{OB}$ un représentant de $\vec{V}$



On a $\overline{OK}.\overline{OA} = \overline{OB}.\overline{OH}$, et OK.OA est appelé PRODUIT SCALAIRE et on note $\vec{OA}.\vec{OB} = \vec{U}.\vec{V}$

Autre définition :

$OA = \|\vec{OA}\|$ et $OK = \|\vec{OB}\|.\cos(\widehat{AOB})$

donc $OA.OK = \|\vec{OA}\|\,\|\vec{OB}\|.\cos(\widehat{AOB})$

$$\boxed{\vec{U}.\vec{V} = \|\vec{U}\|.\|\vec{V}\|.\cos(\vec{U},\vec{V})}$$

Propriétés du produit scalaire

1) Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.
2) $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$
3) $k \in R$, $(k.\vec{U}).\vec{V} = \vec{U}.(k.\vec{V}) = k.(\vec{U}.\vec{V})$
4) Soit $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$

$(\vec{U}+\vec{V}).\vec{W} = \vec{U}.\vec{W} + \vec{V}.\vec{W}$

Note : Le produit scalaire est un nombre réel

- Calcul du produit scalaire avec les coordonnés dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

soit $\vec{U} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$ et $\vec{V} = x'.\vec{i} + y'.\vec{j}$

$$\vec{U}.\vec{V} = (x.\vec{i} + y.\vec{j}) * (x'.\vec{i} + y'.\vec{j})$$

$$= xx'\,\vec{i}^{\,2} + (x'y+y'x).\vec{i}.\vec{j} + yy'\,\vec{j}^{\,2}$$

comme on est dans une base orthonormée :

$\|\vec{i}\| = 1$ donc $\vec{i}^{\,2} = 1$

$\|\vec{j}\| = 1$ donc $\vec{j}^{\,2} = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = 0$

On obtient : $\boxed{\vec{U}.\vec{V} = xx' + yy'}$

13/2.3

Notions générales de trigonométrie

I. Fonctions circulaires

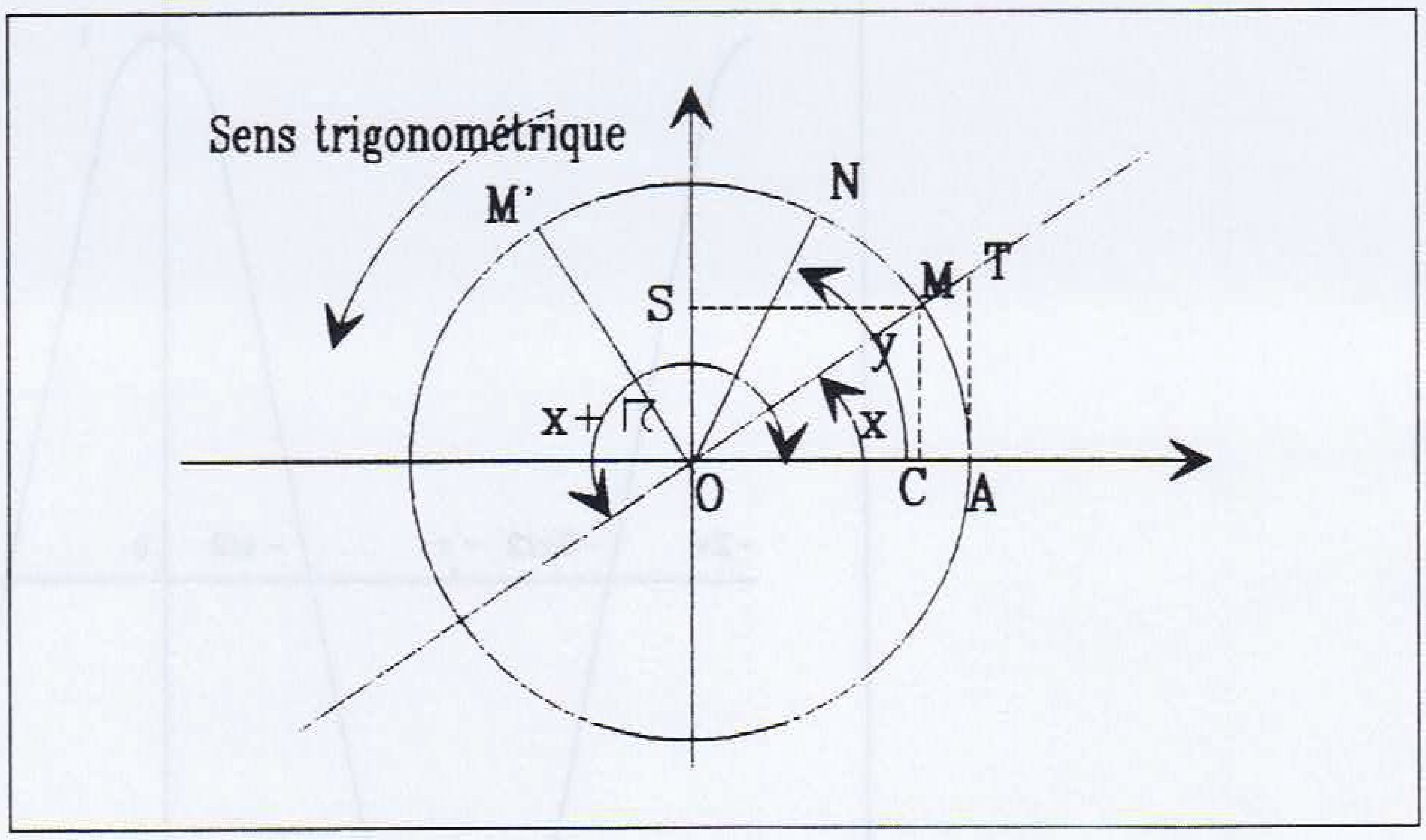
Soit un repère orthonormé (0, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$) et un cercle C centré en O et de rayon égal à l'unité (R = 1)

Soit x la mesure de l'angle $(\widehat{\vec{OA}, O, \vec{OB}})$ et le point M(OC,OS) associé à la mesure x.

On appelle fonction COSINUS du nombre réel x, l'abscisse du point M et fonction SINUS du nombre réel x, l'ordonnée du point M.

On note $\cos(x) = \overline{OC}$

$\sin(x) = \overline{OS}$



Le point C est un point du segment [AA'] donc $-1 \leqslant \cos \leqslant 1$

Le point S est un point du segment [BB'] donc $-1 \leqslant \sin \leqslant 1$

Faisons faire un tour au vecteur $\vec{OM}$, soit un angle de 2π, on s'aperçoit que le cosinus reprend les mêmes valeurs ainsi que le sinus.

On écrira $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ et $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ (k nombre entier relatif, égal au nombre de tours effectués. Si $k > 0$ le sens de rotation est le sens inverse du sens trigonométrique).

On dit alors que les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions périodiques et de période 2π.

- Fonction COSINUS

Faisons tourner $\vec{OM}$ dans le sens trigonométrique.

x varie de 0 à $\pi/2$, le point C décrit le segment [AO] donc cos(x) décroît de 1 à 0

x varie de $\pi/2$ à π, le point C décrit [OA'] de O à A' donc cos(x) décroît de 0 à -1.

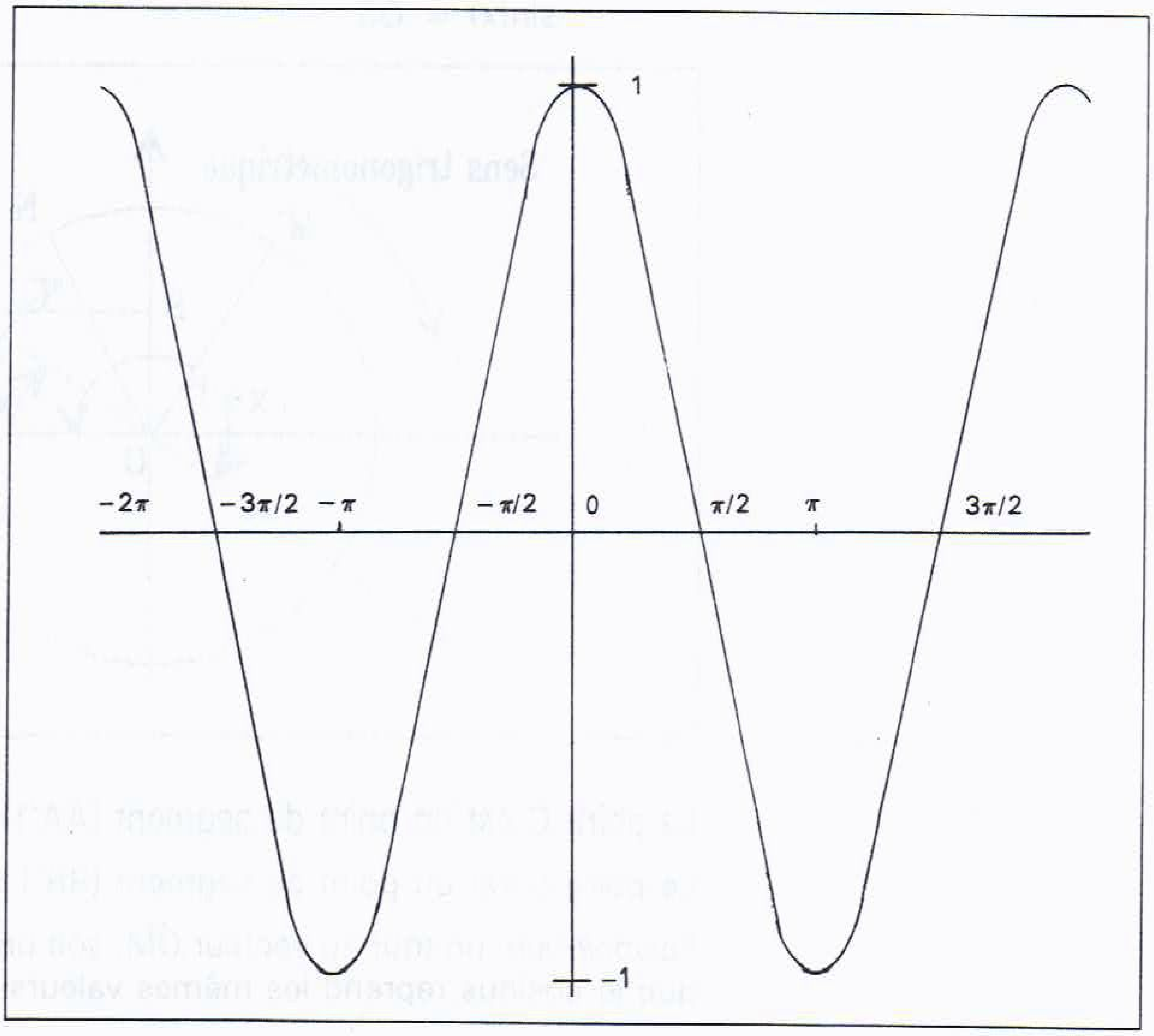
x varie de π à $3\pi/2$, le point C décrit [A'O] de A' à O donc cos(x) croît de -1 à 0

x varie de $3\pi/2$ à 2π, le point C décrit [OA] DE O à A donc cos(x) croît de 0 à 1.

On peut écrire ces résultats dans un tableau appelé tableau de variation.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
cos(x)	1	0	-1	0	1

Courbe représentative



On remarque que ∀x, cos(−x) = cos(x). La fonction cosinus est une fonction paire (symétrie par rapport à l'axe des ordonnées).

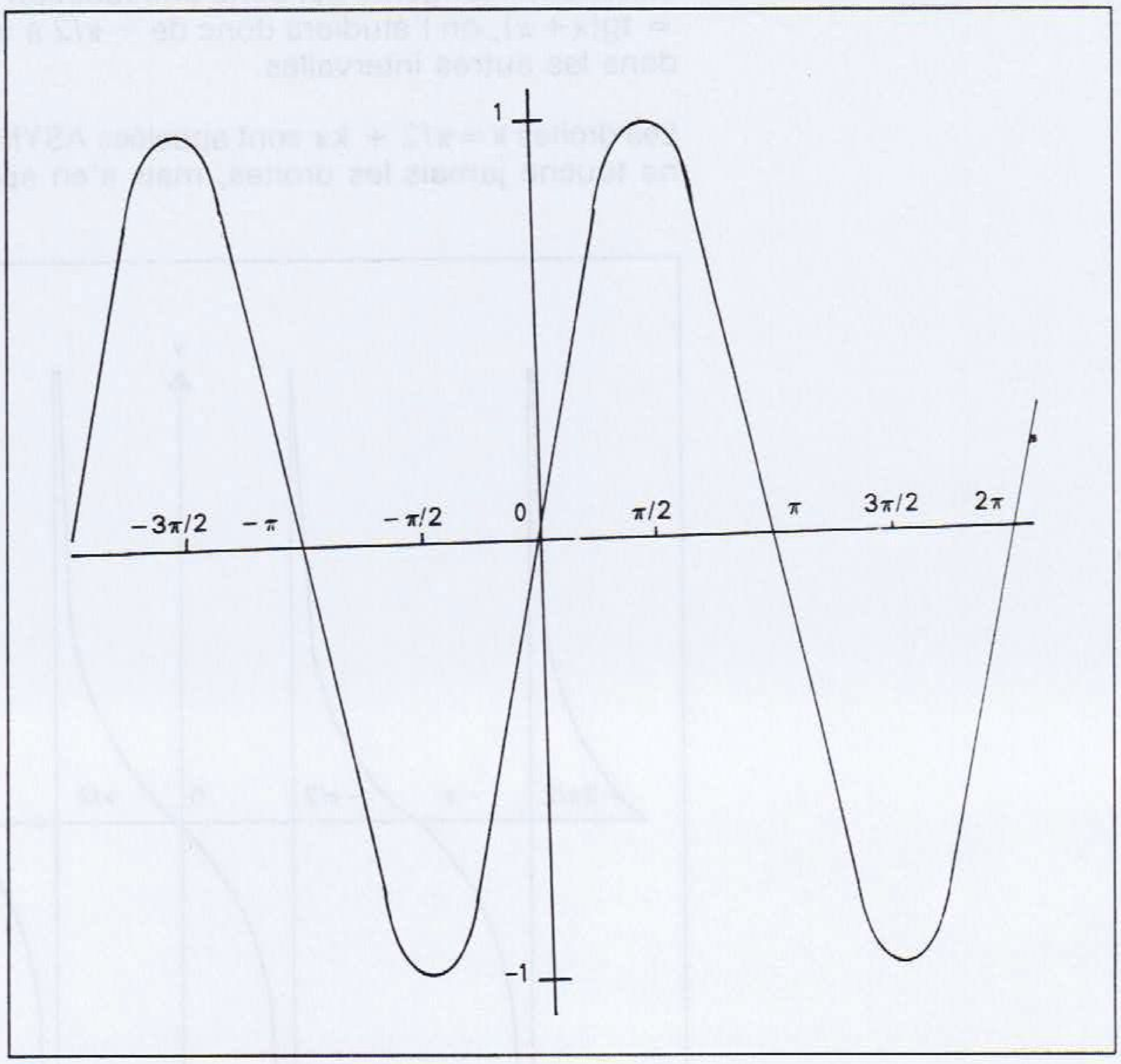
- Fonction SINUS

Pour étudier le sens de variation de la fonction sinus on procédera de la même manière, mais cette fois-ci en prenant le point S.

Tableau de variation

x	0		π/2		π		3π/2		2π
sin x	0	↗	1	↘	0	↘	−1	↗	0

Courbe représentative



On remarque que ∀ x, sin(−x) = −sin(x). La fonction sinus est une fonction dite impaire (symétrie par rapport à 0).

- Fonction TANGENTE

On a définit dans le chapitre géométrie que

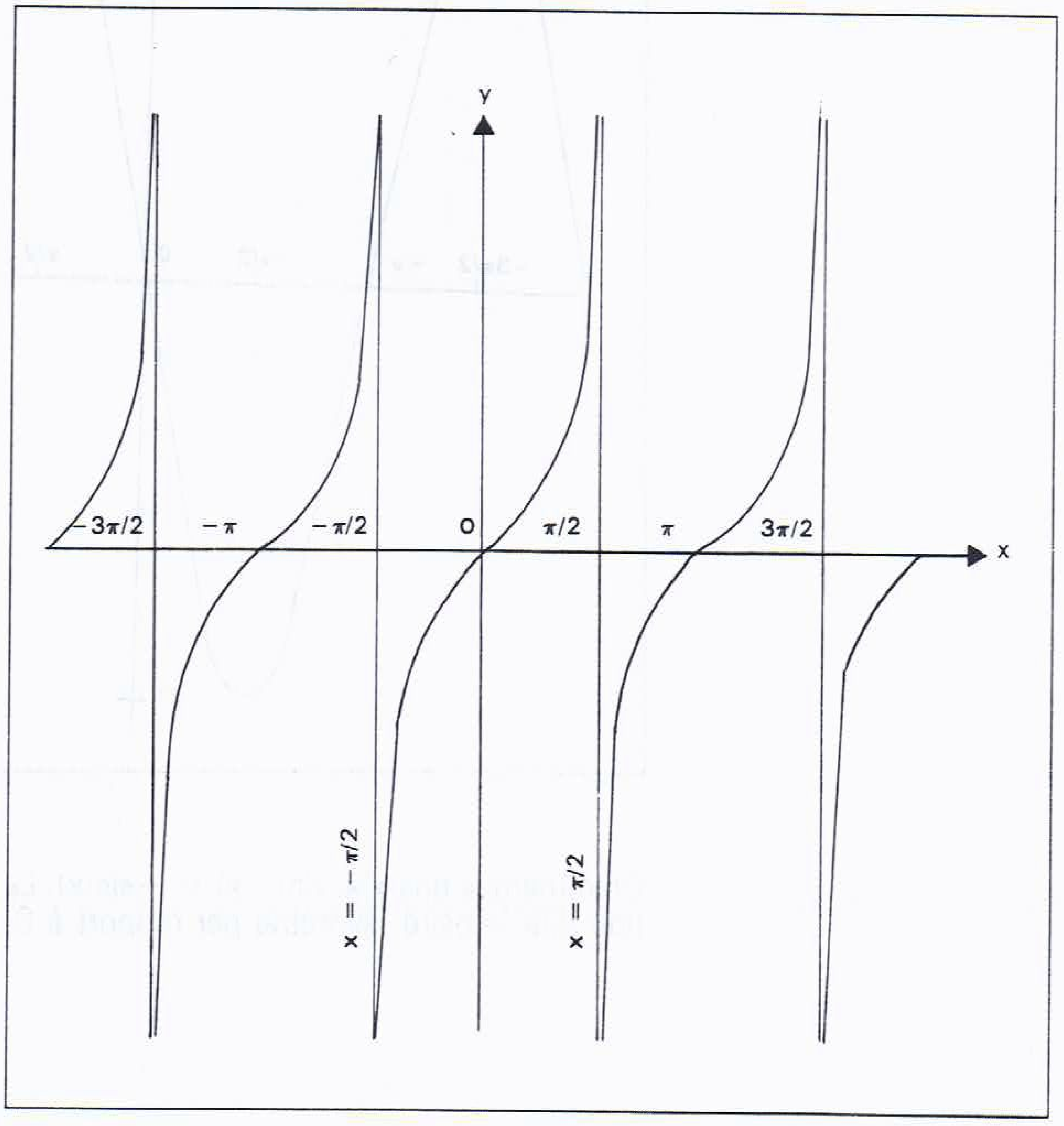
Tangente(x) = sin(x) / cos/(x).

Tangente (x) est représentée sur la courbe suivante par la mesure algébrique $\overrightarrow{AT}$. Tg(x) sera définie pour des valeurs de x différentes de $\pi/2 + k\pi$ ($k \in Z$), car pour ces valeurs le cosinus = 0 et une fraction du style a/0 ($a \in \mathbb{R}$) tend vers l'infini noté ∞.

Si on prend une valeur x, $tg(x) = sin(x)/cos(x)$ et $tg(x+\pi) = sin(x+\pi)/cos(x+\pi) = -sin(x)/-cos(x) = tg(x)$

La fonction tangente est donc une fonction de période π, $\forall x \in \mathbb{R}$: $tg(x) = tg(x+\pi)$, on l'étudiera donc de $-\pi/2$ à $\pi/2$ et on reportera la courbe dans les autres intervalles.

Les droites $x = \pi/2 + k\pi$ sont appelées ASYMPTOTES à la courbe, celle-ci ne touche jamais les droites, mais s'en approche indéfiniment.



Quelques valeurs remarquables pour cos, sin et tg

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
cos(x)	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
sin(x)	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tg(x)	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0
x		$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
cos(x)		$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
sin(x)		$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
tg(x)	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

II. Relation entre les fonctions

Dans le triangle rectangle OCM

$\overline{OC}^2 + \overline{CM}^2 = \overline{OM}^2$ mais $\overline{CM} = \overline{OS}$ et $\overline{OM} = 1$ donc

$\overline{OC}^2 + \overline{OS}^2 = 1$ avec $\overline{OC} = \cos(x)$ et $\overline{OS} = \sin(x)$

$\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$

- Formules d'addition

Dans le repère $(0, \vec{OA}, \vec{OB})$

a) $\vec{OM} = \cos(x).\vec{OA} + \sin(x).\vec{OB}$

b) $\vec{OM}' = \cos(x+\pi/2) \;.\; OA + \sin(x+\pi/2) \;.\; \vec{OB}$

$\vec{OM}' = -\sin(x).\vec{OA} + \cos(x).OB$

c) $\vec{ON} = \cos(x+y).\vec{OA} + \sin(x+y).\vec{OB}$

Dans le repère $(O, \vec{OM}, \vec{OM}')$

d) $\vec{ON} = \cos(y).\vec{OM} + \sin(y).\vec{OM}'$

On remplace dans d) $\vec{OM}$ et $\vec{OM}'$ par a) et b)

On trouve :

$\vec{ON} = \cos(y).(\cos(x).\vec{OA} + \sin(x).\vec{OB}) + \sin(y).(-\sin(x).\vec{OA} + \cos(x).\vec{OB})$

$\vec{ON} = (\cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x)).\vec{OA} + (\cos(y)\sin(x) + \sin(b)\cos(x)).\vec{OB}$

Donc en faisant l'équivalence entre c) et e) on a :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(y)\cos(x) - \sin(y)\sin(x) \\ \sin(x+y) &= \cos(y)\sin(x) + \sin(y)\cos(x) \end{aligned}}$$

Avec le même genre de démonstration, on aurait :

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x-y) = \cos(y)\sin(x) - \sin(y)\cos(x)$$

Par suite

$$tg(x+y) = (tg(x)+tg(y))/(1-tg(x)tg(y)$$
$$tg(x-y) = (tg(x)-tg(y))/(1+tg(x)tg(y)$$

- Formules de duplication

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2.\cos^2 x - 1 = 1 - \sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$$
$$tg2x = 2.tgx/(1-tg^2 x)$$

- **Somme et différence de 2 cosinus**

Elles s'obtiennent en utilisant les formules d'addition.

$$\cos(x) + \cos(y) = 2.\cos((x+y)/2).\cos((x-y)/2)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2.\sin((x+y)/2).\sin((x-y)/2)$$

13/2.4

Notions d'analyse

13/2.4.1

Aperçu sur les fonctions polaires et paramétriques en sinus et cosinus

Prenons comme exemple un cercle C de rayon R dans un repère orthonormé (O, I, J).

Soit le point M(x, y) $\in$ C : $\begin{cases} x = R.\cos\Theta \\ y = R.\sin\Theta \end{cases}$

Ces 2 équations sont appelées équations paramétriques.

Soit le point M, à chaque angle Θ correspond une mesure algébrique $\overline{OM}$. On peut dire que OM est une fonction de Θ et on note $\overline{OM} = f(\Theta)$. Cette équation est appelée équation polaire.

$OM = \sqrt{(R^2\cos\Theta^2 + R^2\sin\Theta^2)} = R\sqrt{(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta)} = R\sqrt{1} = R$

Dans le cas du cercle $f(\Theta) = \text{cste} = R, \forall\Theta$

EQUATIONS POLAIRES

Il existe une infinité d'équations polaires. Nous allons en étudier une sans entrer dans les détails d'une étude complète faisant appel à des notions qui sortiraient du cadre de cet ouvrage.

Soit $f(\Theta) = \sqrt{2}.\sin 2\Theta$

Le sinus est une fonction définie sur R donc : Df = R
(Df est l'ensemble de définition c.a.d l'ensemble des éléments Θ qui ont une image par f).

$f(\Theta + \pi) = \sqrt{2}.\sin 2(\Theta + \pi) = \sqrt{2}.\sin(2\Theta + 2\pi) = \sqrt{2}.\sin(2\Theta)$

donc $f(\Theta + \pi) = f(\Theta)$: Symétrie par rapport à 0.

$f(-\Theta) = \sqrt{2}.\sin(-2\Theta) = -\sqrt{2}.\sin(2\Theta) = -f(\Theta)$

f est impaire donc symétrique par rapport à l'axe y'Oy.

$f(\pi/2 - \Theta) = \sqrt{2}.\sin 2(\pi/2 - \Theta) = \sqrt{2}.\sin(\pi - 2\Theta) = f(\Theta)$

on aura donc une symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle xOy, c.a.d à $\Theta = \pi/4$.

On étudiera la courbe de 0 à $\pi/4$ dont on trouvera la représentation sur la figure 1.

Pour ceci, calculons $f(\Theta)$ pour des valeurs choisies de Θ variant de 0 à $\pi/4$.

$\Theta = 0$	$\sin 0 = 0$	donc $f(0) = OM = 0$
$\Theta = \pi/12$	$\sin 2\pi/12 = 1/2$	donc $f(\pi/12) = ON = \sqrt{2}/2$
$\Theta = \pi/8$	$\sin 2\pi/8 = \sqrt{2}/2$	donc $f(\pi/8) = OP = 1$
$\Theta = \pi/6$	$\sin 2\pi/6 = \sqrt{3}/2$	donc $f(\pi/6) = OQ = \sqrt{6}/2$
$\Theta = \pi/4$	$\sin 2\pi/4 = 1$	donc $f(\pi/4) = OS = \sqrt{2}$

On trace les points dans un repère orthonormé :

point M, $\overline{OM} = 0$, donc $M = 0$

— point N, on trace la droite faisant un angle de $\pi/12$ avec l'axe x'Ox et on trace sur cette droite le point N à une distance de $\sqrt{2}/2$ de 0.

— On procède de la même manière avec les points P, Q et S.

— On rejoint les points M, N, P, Q, S par une courbe approximative.

— Comme f est symétrique par rapport à $\Theta = \pi/4$ on trace les points Q', P', N'.

— f est symétrique par rapport à $\Theta = \pi/2$, on trace donc le symétrique de ce que l'on vient de tracer par rapport à l'axe y'Oy.

— Comme f est aussi symétrique par rapport à 0, on trace les symétriques des 2 parties 5 et 6, par rapport à 0.

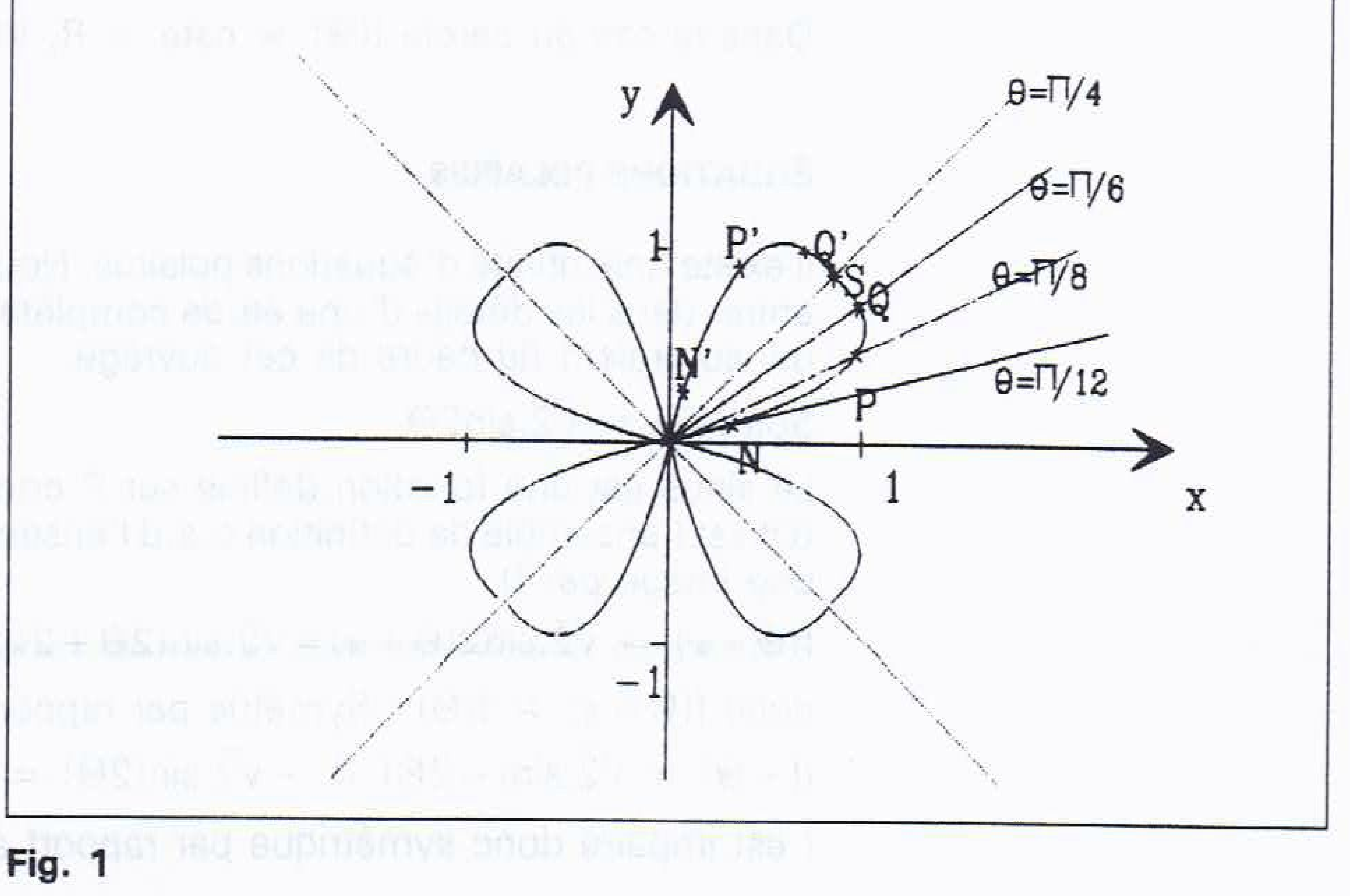


Fig. 1

Remarque :

En ajoutant un angle de déphasage α dans la fonction, on obtient la même courbe (Fig. 2) après une rotation de l'angle α autour du point 0.

Exemple : $f'(\Theta) = \sqrt{2}.\sin(2\Theta + \pi/2)$

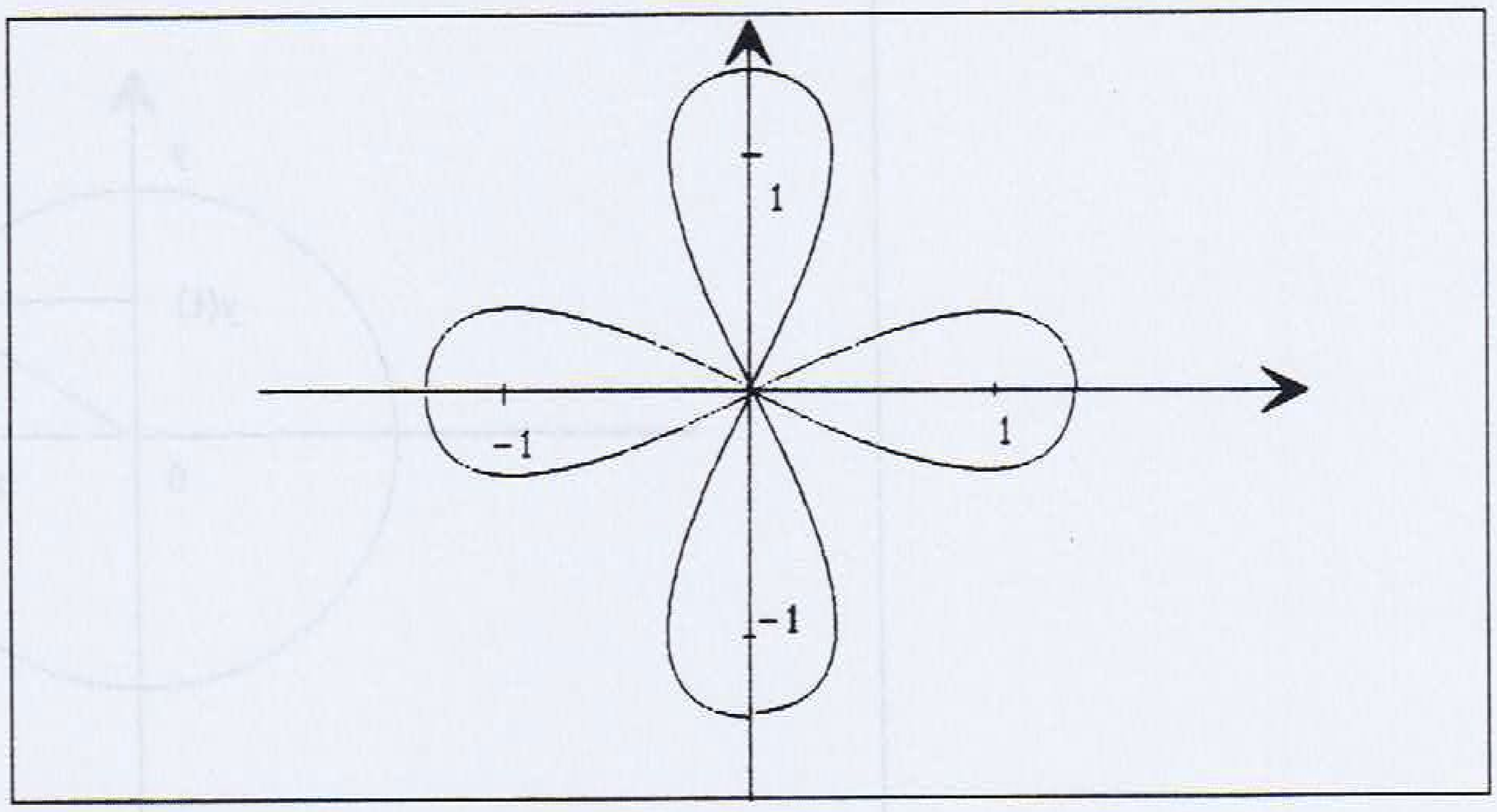


Fig. 2

Voir aussi le programme ''POLAIRE'' ci-dessous :

```
10 REM copyright WEKA 1989
20 DEG
30 INK 0,0:INK 1,13:INK 2,16:INK 3,12
40 PAPER 0
50 CLS
60 INPUT "Entrez la vitesse angulaire"; omega
70 INPUT "Entrez l'amplitude";A
80 INPUT "Entrez la phase @ l'origine";teta
90 MODE 1
100 FOR t = 1 TO 360
110 MOVE 320,400
120 DRAW 320,0,1
130 MOVE 0,200
140 DRAW 640,200,1
150 MOVE 100,200
160 e=COS(omega*t)
170 IF e=0 GOTO 270
180 ro = 100*A*SIN(omega*t+teta)
190 x  =320+ ro*COS(t+teta)
200 y  = 200+ ro*SIN(t+teta)
210 IF t>1 GOTO 240
220  x1=x : y1=y
230 GOTO 270
240 PLOT x1,y1
250 DRAW x,y,2
260 x1=x : y1=y
270 NEXT t
280 END
```

EQUATIONS PARAMÉTRIQUES

Soit une courbe plane définie par une représentation graphique (Fig. 3) de la forme $\overline{OM} = x(t)*i + y(t)*j$ où x et y sont des fonctions d'une même variable t appelée paramètre, et aussi les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

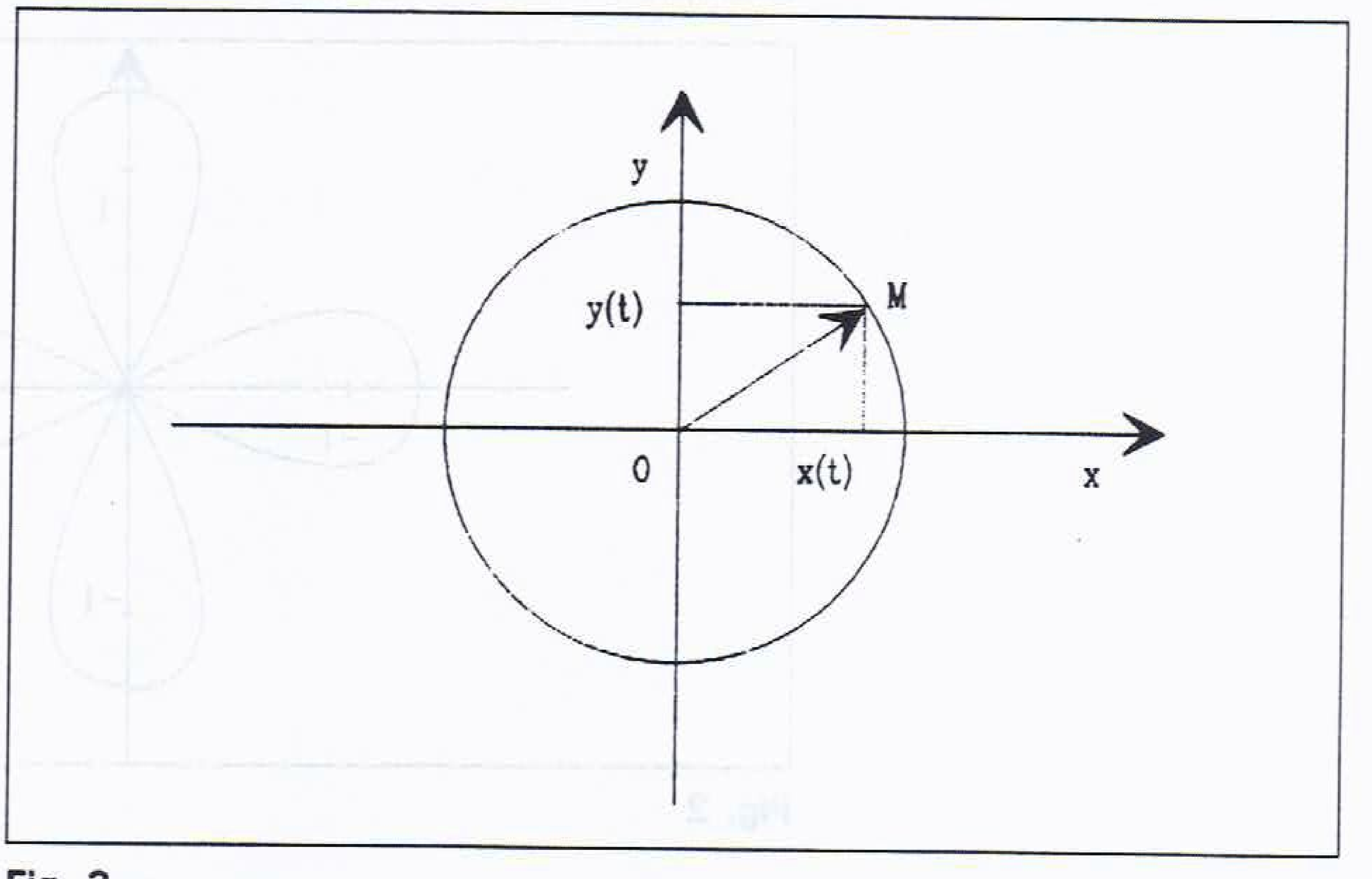


Fig. 3

Pour tracer la courbe, nous donnerons différentes valeurs à t et obtiendrons les valeurs correspondantes de x et y.

Soit l'exemple : $\begin{cases} x(t) = \sin 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$

Etude de la fonction :

- les fonctions sin2t et sin3t sont définies sur R donc Df = R.
- pour réduire au minimum l'intervalle d'étude, on va chercher la plus petite période commune aux 2 fonctions et chercher, si elles existent, des symétries.
- période de x(t) :

Il faut trouver la plus petite valeur T différente de 0 telle que $x(t) = x(t+T)$.

Soit $\Theta = t+T$ on a $\sin 2\Theta = \sin 2(t+T) = \sin(2t+2T)$,

on a vu que la période de la fonction sinus est 2π. Il faut donc que

$$\begin{aligned} \sin(2t+2T) &= \sin(2t+2\pi) \\ 2t+2T &= 2t + 2\pi \\ 2T &= 2\pi \\ T &= \pi \end{aligned}$$

La période de x(t) est π et on a :

$\forall\, t \in R,\ x(t) = x(t+\pi)$

De même pour la période de y(t) on trouverait :

$T = 2\pi/3$
$\forall\, t \in R,\ y(t) = y(t+2\pi/3)$

La plus petite période commune à x et y est 2π.
L'intervalle d'étude $E = [0;2\pi]$

- Recherche de symétries :

$\forall\, t \in R,\ x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ car la fonction sinus est une fonction impaire donc il existe une symétrie / O, l'intervalle d'étude devient $E = [0,\pi]$.

$\forall(t)\ x(\pi - t) = -x(t)$ et $y(\pi - t) = y(t)$ donc la courbe présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées yy'. L'intervalle d'étude devient $E = [0,\ \pi/2]$.

- Représentation graphique (Fig. 4) :

On se donne donc des valeurs de t variant de 0 à $\pi/2$ et on calcule x(t) et y(t).

points	**O**	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
t	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
x(t)	0	1/2	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0
y(t)	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	-1

Dans un repère orthonormé, on trace les points O, A, B, C, D, E et on les joint par une courbe.

De cette courbe on trace le symétrique par rapport à l'axe yy' (courbe EFGHIO).

Ensuite le symétrique / O (courbe en trait interrompu).

APPLICATION : TENSIONS AUX BORNES D'UN OSCILLOGRAPHE

- Fonctions sinusoïdales du temps (Fig. 5)

Soit un repère orthonormé et un vecteur $\overrightarrow{OM}$, de norme a, tournant à la vitesse angulaire constante Ω dans le sens trigonométrique (Ω en radian/seconde).

Pour parcourir l'angle Θ le vecteur a mis un certain temps t tel que $\Theta = \Omega * t$.

Soit le point s : $\overline{OS} = a * \sin(\Theta + \alpha)$

$\overline{OS} = a * \sin(\Omega * t + \alpha)$

$\overline{OS} = a * \sin(2 * \pi * t/T + \alpha)$ où $T = 2\pi/\Omega$.

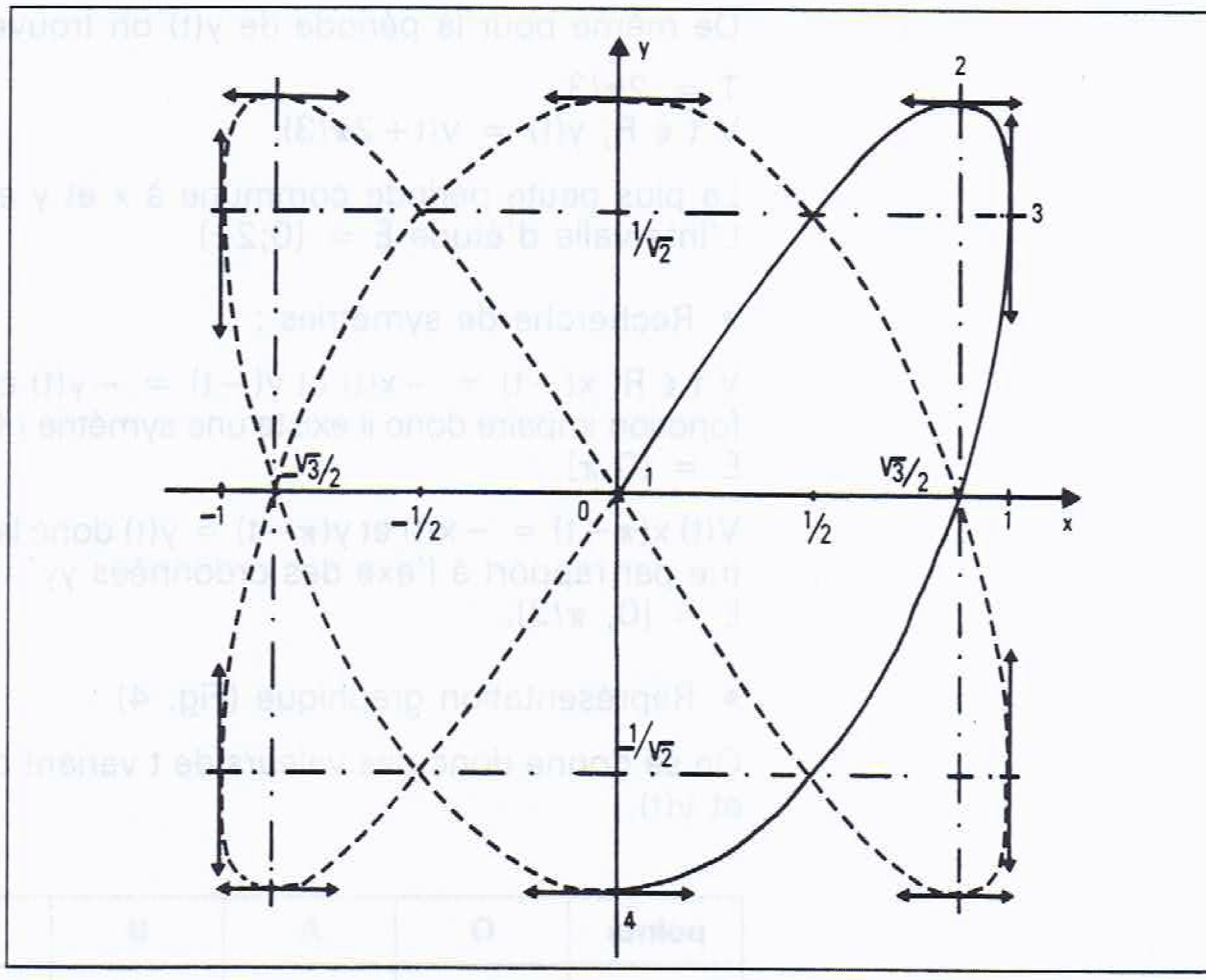


Fig. 4

$\overline{\mathbf{OS}}$ est donc une fonction sinusoïdale du temps.
a est appelée amplitude ou valeur maximum que peut prendre la fonction.
α est appelée phase à l'origine (position initiale du vecteur).
T appelée période c.a.d le temps mis par le vecteur pour faire un tour (2π).

De même la fréquence f = 1/T en hertz qui représente le nombre de tours par seconde.

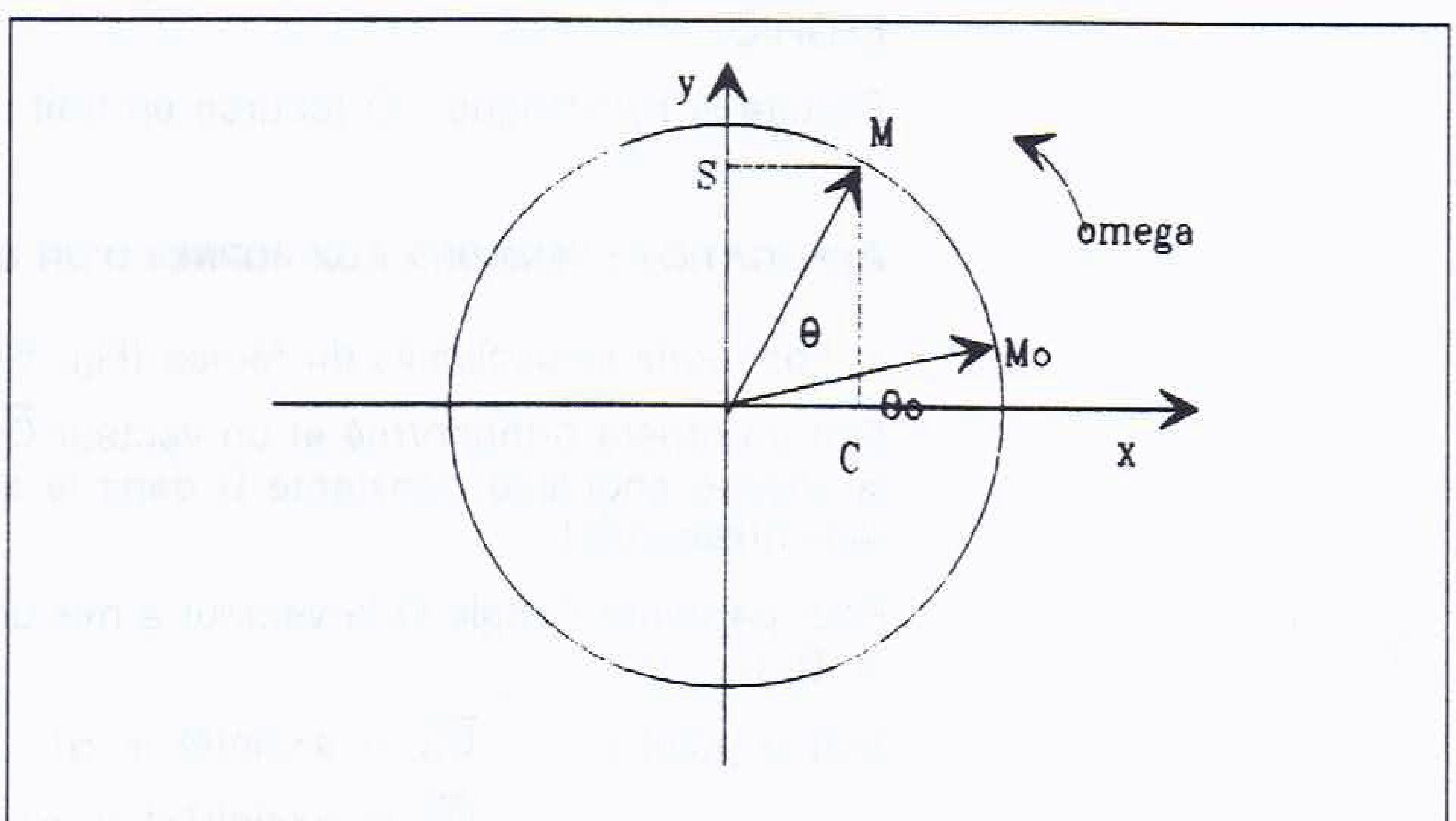


Fig. 5

Le programme ''SINUS'' vous permettra de mieux comprendre l'évolution de la fonction avec le temps.

- Somme de 2 fonctions sinusoïdales du temps de même période.

Représentation de FRESNEL.

```
10 REM copyright WEKA 1989
20 MODE 1
30 DEG
40 INK 0,0:INK 1,13:INK 2,16
50 PAPER 0
60 CLS
70 INPUT "Entrez la phase @ l'origine en degr{s";alfa
80 INPUT "Entrez la vitesse angulaire en degr{s par seconde";omega
90 T=360/omega:CLS
100  LOCATE 1,23:PRINT" la p{riode est ";T;"secondes"
110  LOCATE 1,24:PRINT" la phase @ l'origine est";alfa;"degr{s"
120 LOCATE 1,25:PRINT " la fr{quence est ";1/T;" Hertz"
130 MOVE 0,200:DRAW 190,200,1:MOVE 220,200:DRAW 639,200,1
140 MOVE 610,200:DRAW 610,195,1
150 MOVE 250,40:DRAW 250,399,1
160 MOVE 100,40:DRAW 100,399
170 LOCATE 6,4:PRINT "y":LOCATE 15,4:PRINT "y"
180 LOCATE 13,14:PRINT "x":LOCATE 39,12 :PRINT "t":LOCATE 36,14:PRINT"360 s"
190 LOCATE 1,1:PRINT"trac{ du cercle trigonom{trique"
200 FOR t=0 TO 360
210 PLOT 100+77*COS(t),200+77*SIN(t),1
220 NEXT
230 LOCATE 1,1 :PRINT"le vecteur de Fresnel tourne, tra\{ de   la sinusoide pou
";omega;" p{riodes"
240 FOR t=0 TO T
250 MOVE 177,200
260 DRAW 23,200,1:MOVE 100,123
270 DRAW 100,277,1:MOVE 100,200
280 DRAW 100+75*COS(omega*t+alfa),200+75*SIN(omega*t+alfa),0
290 MOVE 100,200
300 DRAW 100+75*COS(omega*(t+1)+alfa),200+75*SIN(omega*(t+1)+alfa),2
310 x=250+(t):y=200+77*SIN(omega*t+alfa)
320 MOVE x,y
330 DRAW 250+(t+1),200+77*SIN(omega*(t+1)+alfa),2
340 NEXT
350 LOCATE 1,1: PRINT"trac{ termin{
"
```

Prenons 2 fonctions sinusoïdales :

$$f(t) = a * \sin(\omega * t + \alpha 1)$$
$$g(t) = b * \sin(\omega * t + \alpha 2)$$

avec a, norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et b, norme de $\overrightarrow{ON}$

A l'instant t = 0 le vecteur $\overrightarrow{OM}$ fera un angle de $\alpha 1$ avec ox puisque wt = 0, de même $\overrightarrow{ON}$ fera un angle $\alpha 2$ avec ox. Nous représenterons donc les 2 vecteurs à t = 0. Cette représentation est appelée représentation de FRESNEL (Fig. 6).

($\alpha 1 - \alpha 2$) est appelé DEPHASAGE entre les 2 fonctions.

Cette représentation permet de faire la somme ou la différence de plusieurs fonctions de même fréquence grâce aux propriétés des vecteurs et ainsi de trouver graphiquement son amplitude et sa phase à l'origine sachant que w sera sa vitesse angulaire. Le vecteur somme sera la diagonale du parallélogramme.

Exemple : $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$

$s(t) = \overline{OS} * \sin(\omega * t + \alpha)$

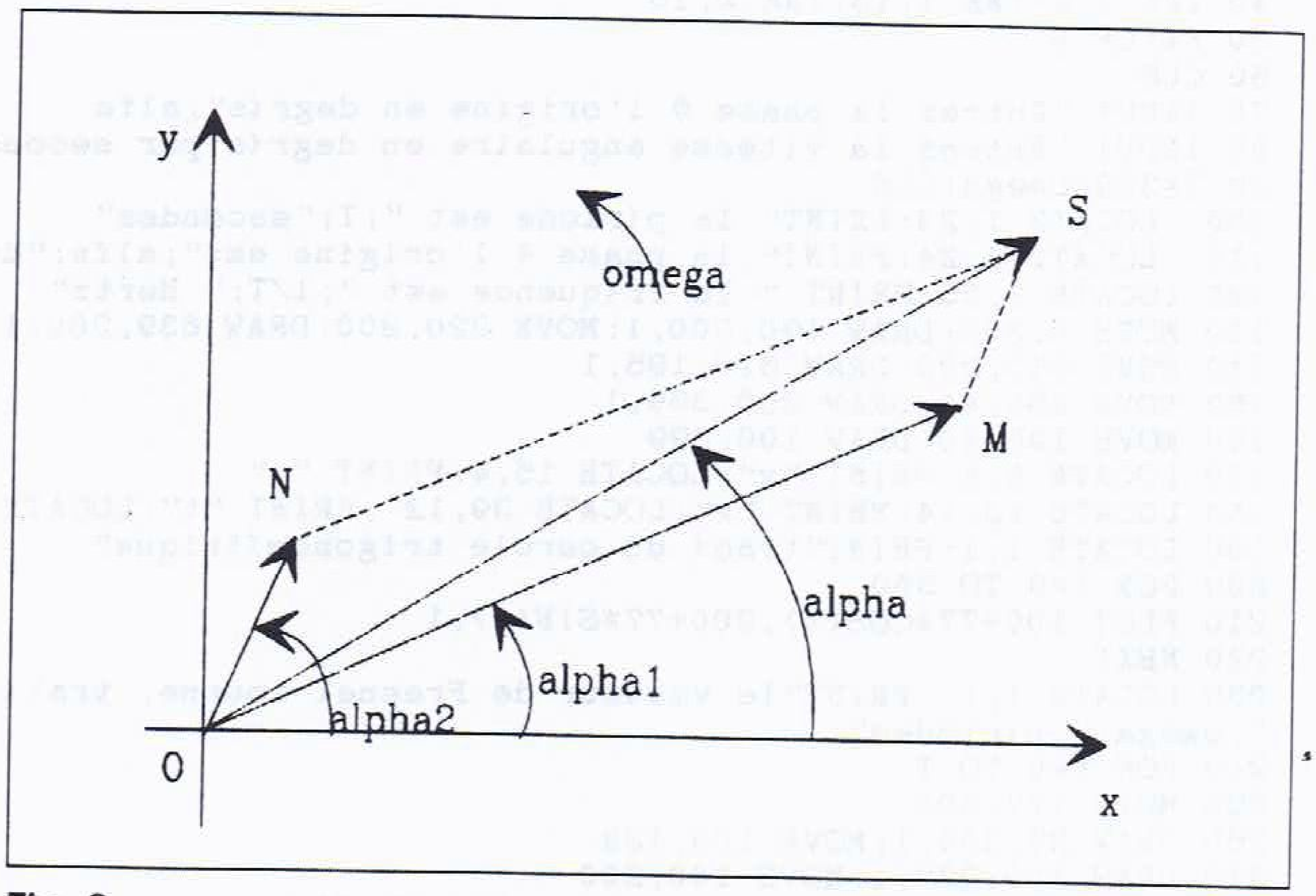


Fig. 6

Nota : l'amplitude et la phase de la somme peuvent être aussi calculées.

- Somme de 2 fonctions sinusoïdales de périodes différentes

La représentation de Fresnel n'est plus valable.

Le parallélogramme OMSN se déforme car les vitesses angulaires sont différentes. Aussi pour trouver la fonction somme on passe par des calculs compliqués qui ne seront pas développés ici.

Le programme ''SOMME'' vous permettra de mieux comprendre l'évolution du vecteur somme de deux vecteurs ou plus.

```
10 REM copyright WEKA 1989
20 DIM as(4),bs(4),cs(4),ds(4),vitesse(4),phase(4),periode(4),maxi(4)
30 MODE 2
40 DEG
50 INK 0,0:INK 1,13:INK 2,16:INK 3,12
60 PAPER 0
70 CLS
80 INPUT "Entrez le nombre de fonctions < 5 ";n
90 FOR i=1 TO n
100 PRINT "FONCTION ";i
110 INPUT "Entrez la phase @ l'origine  en degr{s ";phase(i)
120 INPUT "Entrez la vitesse angulaire  en degr{s/s";vitesse(i)
130 INPUT "Entrez l'amplitude maxi en pixels ( < 75 ) ";maxi(i)
140 periode(i)=360/vitesse(i)
150 T = MAX(T,periode(i))
160 NEXT i
170 MODE 1
180 CLS
190 FOR t=0 TO 360
200  LOCATE 1,23
210 REM  TRACE DES AXES
220  LOCATE 1,24
230 LOCATE 1,25
240 MOVE 0,200:DRAW 190,200,1:MOVE 220,200:DRAW 639,200,1
250 MOVE 610,200:DRAW 610,195,1
260 MOVE 250,40:DRAW 250,399,1
270 MOVE 100,40:DRAW 100,399
280 LOCATE 6,4:PRINT "y" LOCATE 15,4:PRINT "y"
290 LOCATE 13,14:PRINT "x":LOCATE 39,12 :PRINT "t":LOCATE 36,14:PRINT"360 s"
300 FOR i = 1 TO n
310 MOVE 200,200
320 DRAW 23,200,1:MOVE 100,123
330 DRAW 100,277,1:MOVE 100,200
340 omega=vitesse(i)
350 alfa=phase(i)
360 norme=maxi(i)
370 GOSUB 620
380 as(i)=a
390 bs(i)=b
400 cs(i)=c
410 ds(i)=d
420 NEXT i
430 REM vecteur somme
440 a=0:b=0:c=0:d=0
450 FOR i=1 TO n
460 a = a + as(i)
470 b = b + bs(i)
480 c = c + cs(i)
490 d = d + ds(i)
500 NEXT i
510 MOVE 100,200
520 DRAW 100+a,200+b,0
530 MOVE 100,200
540 DRAW 100+c,200+d,1
550 xs = 250+(t):ys = 200+b
560 MOVE xs,ys
570 DRAW 250+(t+1),200+d,1
580 NEXT
590 LOCATE 1,1: PRINT"trac{ termin{
                               "
```

```
600 END
610 REM  Sous-programme de trac{
620 a = norme*COS(omega*t+alfa)
630 b = norme*SIN(omega*t+alfa)
640 c = norme*COS(omega*(t+1)+alfa)
650 d = norme*SIN(omega*(t+1)+alfa)
660 DRAW 100+a,200+b,0
670 MOVE 100,200
680 DRAW 100+c,200+d,2
690 x=250+t : y=200+b
700 MOVE x,y
710 DRAW 250+(t+1),200+d,2
720 RETURN
```

Attention : le temps défini dans les programmes ne correspond pas au temps réel.

- Oscillographe (Fig. 7)

Un oscillographe est un accélérateur d'électrons (particules chargées négativement). Il dévie ceux-ci d'abord entre 2 plaques horizontales et ensuite entre 2 plaques verticales. Entre ces plaques existe un champ électrique dû à une différence de potentiel appelée aussi tension. Il va permettre de visualiser et d'étudier la tension verticale (externe) grâce à un balayage horizontal dû à une tension interne en dent de scie dont on peut faire varier la fréquence.

Cette tension sera matérialisée par la persistance de la trace du faisceau sur le spot lumineux.

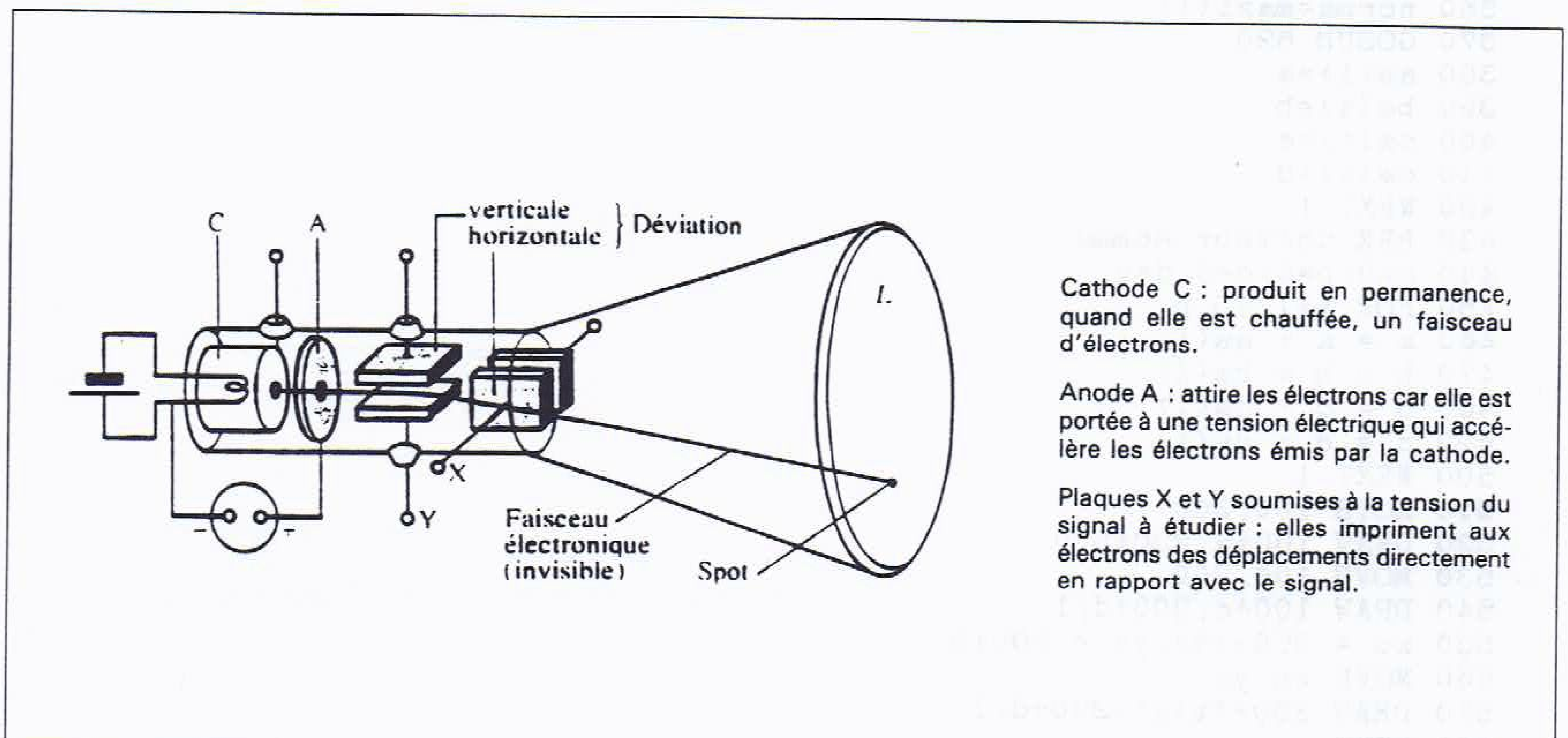


Fig. 7 : Coupe d'un tube d'oscillographe.

Nous pouvons donc considérer que la courbe sur l'écran est une représentation graphique de 2 fonctions paramétriques x(t) en horizontal et y(t) en vertical.

Nota : Les tensions sinusoïdales sont définies par la lettre u et s'écriront de la forme :

$$u(t) = U*\sin(\Omega*t + \Theta)$$

U est appelée tension maximale.

- Tension sinusoïdale en y et tension en dents de scie en x (Fig. 8)

Soit x(t) telle que sa période soit 2π

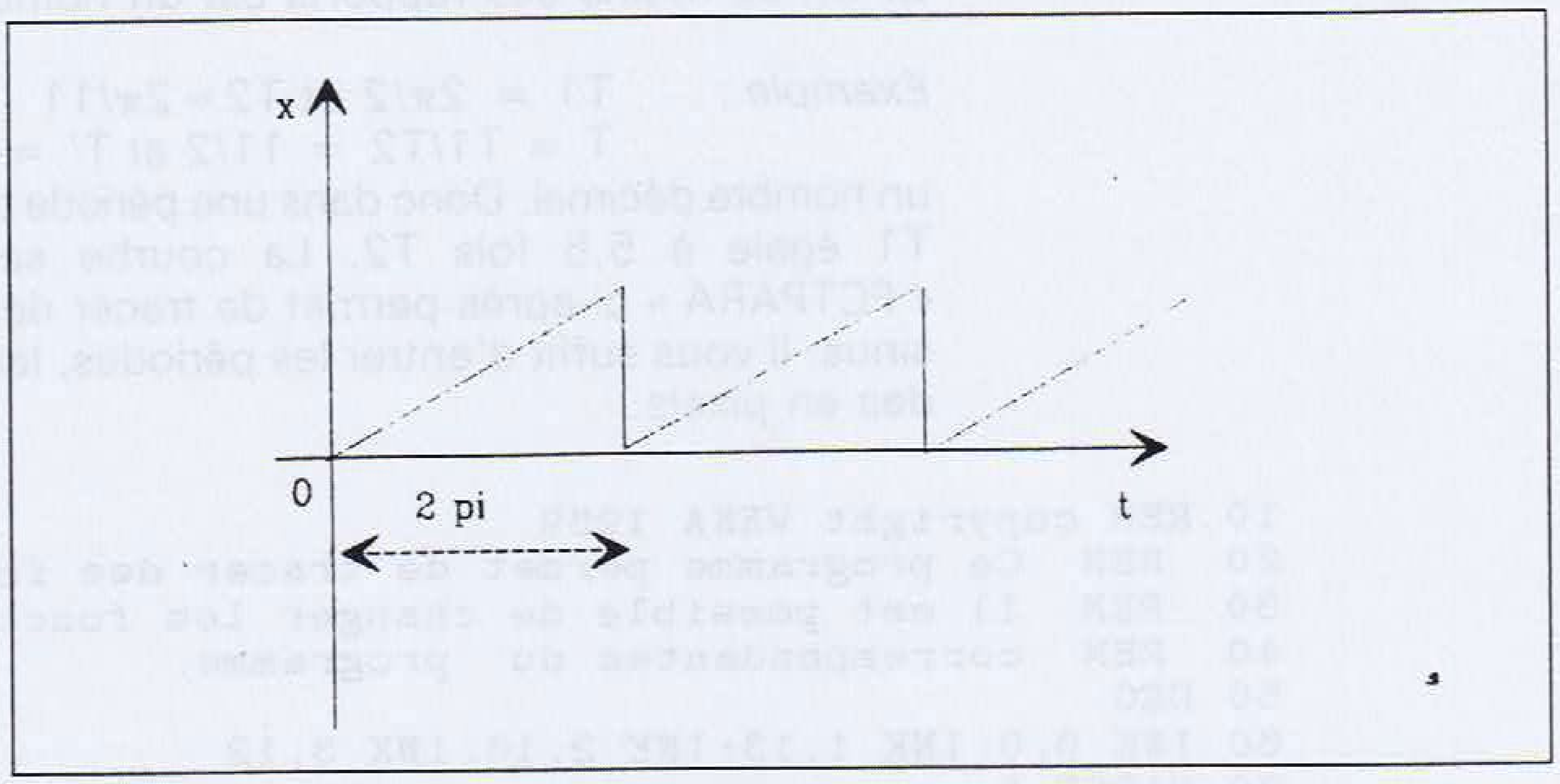


Fig. 8

soit y(t) = sin(t)

En faisant varier t de 0 à 2π, on obtient des points dont les coordonnées sont (x(t), y(t)) et donc la courbe ci-dessous, sur l'écran de l'oscillographe (Fig. 9).

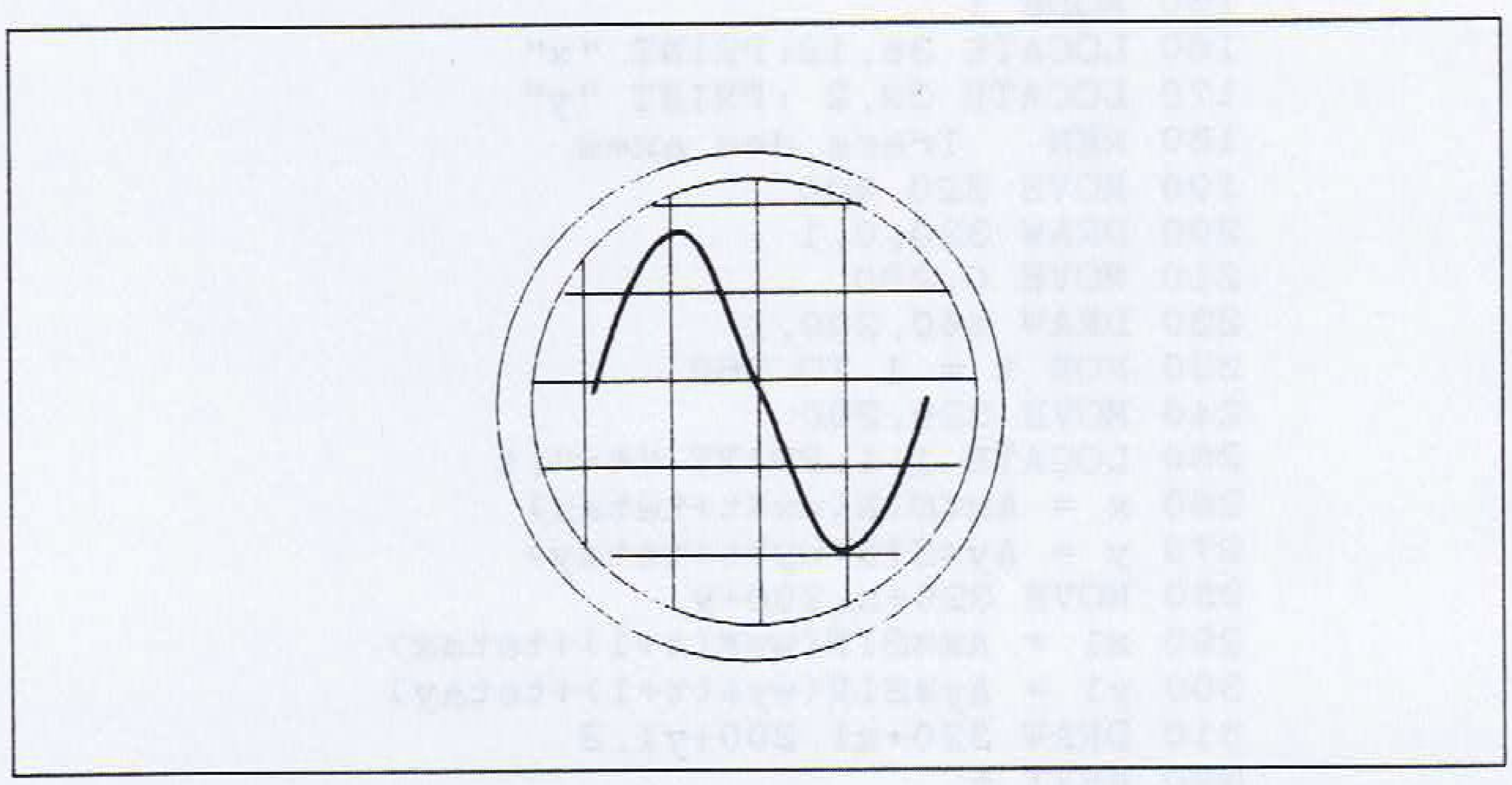


Fig. 9

- Tension sinusoïdale en y et tension sinusoïdale en x.

Nous pouvons shunter la tension interne de l'oscillographe par une tension externe. Choisissons celle-ci telle qu'elle soit sinusoïdale. Deux cas peuvent se produire :

1) Les rapports entre les 2 périodes sont des fractions irréductibles.

Exemple : $T1 = 2\pi/3$ et $T2 = 2\pi/11$
$T = T1/T2 = 11/3$ et $T' = T2/T1 = 3/11$

ces 2 nombres sont illimités. En conséquence la courbe ne sera pas fermée sur elle-même.

2) Un au moins des rapports est un nombre décimal.

Exemple : $T1 = 2\pi/2$ et $T2=2\pi/11$
$T = T1/T2 = 11/2$ et $T' = T2/T1 = 2/11$ $T = 5.5$ est un nombre décimal. Donc dans une période commune de 2π, nous aurons T1 égale à 5,5 fois T2. La courbe sera fermée. Le programme « FCTPARA » ci-après permet de tracer des courbes paramétriques en sinus. Il vous suffit d'entrer les périodes, les déphasages et les amplitudes en pixels.

```
10 REM copyright WEKA 1989
20  REM  Ce programme permet de tracer des fonctions param{triques
30  REM  Il est possible de changer les fonctions dans les lignes
40  REM  correspondantes du  programme.
50 DEG
60 INK 0,0:INK 1,13:INK 2,16:INK 3,12
70 PAPER 0
80 CLS
90 INPUT "Entrez la vitesse angulaire de x"; wx
100 INPUT "Entrez la phase @ l'origine de x "; tetax
110 INPUT "Entrez l'amplitude de x en pixels"; Ax
120 INPUT "Entrez la vitesse angulaire de y"; wy
130 INPUT "Entrez la phase @ l'origine y"; tetay
140 INPUT "Entrez l'amplitude de y en pixels"; Ay
150 MODE 1
160 LOCATE 38,12:PRINT "x"
170 LOCATE 22,2 :PRINT "y"
180 REM   Trace des axes
190 MOVE 320,400
200 DRAW 320,0,1
210 MOVE 0,200
220 DRAW 640,200,1
230 FOR t = 1 TO 360
240 MOVE 320,200
250 LOCATE 1,1:PRINT "t=";t
260 x = Ax*SIN(wx*t+tetax)
270 y = Ay*SIN(wy*t+tetay)
280 MOVE 320+x,200+y
290 x1 = Ax*SIN(wx*(t+1)+tetax)
300 y1 = Ay*SIN(wy*(t+1)+tetay)
310 DRAW 320+x1,200+y1,2
320 NEXT t
330 END
```